قسم الفيزياء كلية العلوم الدقيقة جامعة الوادي	تصحيح إمتحان ميكانيك الكم	السنةالثالثة ليسانس فيزياء 2018-2017

التمرين الأول:(14 نقطة)

1. التمثيل المصفوفي للمؤثرين A و H:

$$A = \begin{pmatrix} \langle 1|A|1\rangle & \langle 1|A|2\rangle & \langle 1|A|3\rangle \\ \langle 2|A|1\rangle & \langle 2|A|2\rangle & \langle 2|A|3\rangle \\ \langle 3|A|1\rangle & \langle 3|A|2\rangle & \langle 3|A|3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \langle 1|H|1\rangle & \langle 1|H|2\rangle & \langle 1|H|3\rangle \\ \langle 2|H|1\rangle & \langle 2|H|2\rangle & \langle 2|H|3\rangle \\ \langle 3|H|1\rangle & \langle 3|H|2\rangle & \langle 3|H|3\rangle \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. القيم الذاتية و الأشعة الذاتية لمؤثر الطاقة H:

(ا) القيم الذاتية:

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0 \implies \begin{vmatrix} E-\lambda & \sqrt{3}E & 0 \\ \sqrt{3}E & -E-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{aligned}[t] &= (E-\lambda)(-E-\lambda)(E-\lambda) \\ &\quad - \sqrt{3}E\sqrt{3}E(E-\lambda) \\ &= (E-\lambda)(-(E^2-\lambda^2) - 3E^2) \\ &= (E-\lambda)(\lambda^2 - 4E^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} E - \lambda = 0 \\ \lambda^2 - 4E^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = E \\ \lambda = \pm 2E \end{cases}$$

(ب) الأشعة الذاتية:

$$H|E\rangle = E|E\rangle \implies \cancel{E} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \cancel{E} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha + \sqrt{3}\beta = \alpha \\ \sqrt{3}\alpha - \beta = \beta \\ \gamma = \gamma \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = \gamma \end{cases} \implies |E\rangle = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

لتعيين الثابت γ نستعمل شرط التنظيم

$$\langle E|E\rangle = |\gamma|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\gamma|^2 = 1 \implies \gamma = 1$$

إذن الشعاع الذاتي لـ H المرفق بالقيمة الذاتية E هو

$$|E\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

قسم الفيزياء كلية العلوم الدقيقة جامعة الوادي	إمتحان ميكانيك الكم المدة: ساعة و نصف	السنةالثالثة ليسانس فيزياء 2018-2017

التمرين الأول:(14 نقطة)

جملة فيزيائية فضاء حالاتها الشعاعي ذو ثلاثة أبعاد معرف بالأساس $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha=1,2,3} \equiv \{|\varphi_\alpha\rangle\}$، حيث ان معادلات القيم الذاتية للمؤثر A و مؤثر الطاقة H تكتب:

$$\begin{array}{lll} A|1\rangle = 1|1\rangle & , & H|1\rangle = E|1\rangle + E\sqrt{3}|2\rangle. \\ A|2\rangle = 1|2\rangle & , & H|2\rangle = E\sqrt{3}|1\rangle - E|2\rangle. \\ A|3\rangle = 0|3\rangle & , & H|3\rangle = E|3\rangle. \end{array}$$

1. أكتب المصفوفتين الممثلتين للمؤثرين A و H على الأساس $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha=1,2,3}$.
2. عين القيم الذاتية و الأشعة الذاتية لمؤثر الطاقة.
3. أكتب المصفوفات الممثلة للأشعة الذاتية $\langle 1|$، $\langle 2|$، $\langle 3|$ ثم بين أنها متعامدة.
4. هل المؤثران A و H مدركان.
5. هل A ثابت حركة.
6. إذا كان المؤثران A و H يتبادلان، فعين الأشعة الذاتية المشتركة لهما.
7. في اللحظة $t = 0$ حالة الجملة يصفها شعاع الحالة المعرف بـ:

$$|\psi(0)\rangle = C\left[|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle - |3\rangle\right]$$

(ا) أحسب C حتى يكون شعاع الحالة منظم.

(ب) إذا قمنا بقياس A عند اللحظة $t = 0$، فما هي القيم التي يمكن ان نحصل عليها و ماهو احتمال الحصول على كل قيمة.

(ج) أحسب القيمة المتوسطة للمؤثر A على الحالة $|\psi(0)\rangle$ ثم أحسب الإنحراف المربع المتوسط σ_A.

التمرين الثاني:(6 نقاط)

مؤثر الطاقة للهزاز التوافقي يأخذ الشكل التالي: $H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$

حيث أن مؤثر الخفض a يعطى بالعبارة التالية: $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$

1. إستنتج عبارة مؤثر الرفع $a^\dagger$ ثم أحسب $[a, a^\dagger]$.
2. أحسب المبدل $[(a^\dagger)^n, H]$.
3. معادلة القيم الذاتية لمؤثر الطاقة هي: $H|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$.

(ا) أثبت أن الشعاع $(a^\dagger)^n|\varphi\rangle$ هو شعاع ذاتي لـ H.

(ب) استنتج القيمة الذاتية لـ H المرفقة بهذا الشعاع.

بالتوفيق

$$H|2E\rangle = 2E|2E\rangle \quad \Longrightarrow \quad E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2E\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \sqrt{3}\beta = 2\alpha \\ \sqrt{3}\alpha - \beta = 2\beta \\ \gamma = 2\gamma \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{3}\beta = \alpha \\ \alpha = \sqrt{3}\beta \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |2E\rangle = \beta\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لتعيين الثابت β نستعمل شرط التنظيم

$$\langle 2E|2E\rangle = |\beta|^2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4|\beta|^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{1}{2}$$

إذن الشعاع الذاتي لـ H المرفق بالقيمة الذاتية $2E$ هو

$$|2E\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$H|-2E\rangle = -2E|-2E\rangle \quad \Longrightarrow \quad E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -2E\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \sqrt{3}\beta = -2\alpha \\ \sqrt{3}\alpha - \beta = -2\beta \\ \gamma = -2\gamma \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \beta = -\sqrt{3}\alpha \\ \sqrt{3}\alpha = -\beta \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |-2E\rangle = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لتعيين الثابت α نستعمل شرط التنظيم

$$\langle -2E|-2E\rangle = |\alpha|^2 \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = 4|\alpha|^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

إذن الشعاع الذاتي لـ H المرفق بالقيمة الذاتية $-2E$ هو

$$|-2E\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. كتابة المصفوفات الممثلة للأشعة الذاتية $\langle 1|$، $\langle 2|$، $|3\rangle$ و إثبات أنها متعامدة

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} \langle 1|1\rangle \\ \langle 2|1\rangle \\ \langle 3|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ |2\rangle = \begin{pmatrix} \langle 1|2\rangle \\ \langle 2|2\rangle \\ \langle 3|2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |3\rangle = \begin{pmatrix} \langle 1|3\rangle \\ \langle 2|3\rangle \\ \langle 3|3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. المؤثران A و H مدركان

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger = A\ ,\ H^\dagger = E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\dagger = H$$

5. حتى يكون A ثابت حركة لابد أن يحقق $[A,H]=0$

$$AH = E\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HA = E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الشرط محقق إذن A ثابت حركة.

6. الأشعة الذاتية المشتركة لـ A و H

بما أن القيمة الذاتية 1 لـ A منحلة فإن :

$$|a=1\rangle = c|1\rangle + d|2\rangle$$

حيث أن c و d ثابتان كيفيان.

حتى نحصل على الشعاع الذاتي $|2E\rangle$ لابد من إختيار $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $d=\frac{1}{2}$ أي

$$|1,2E\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle$$

حتى نحصل على الشعاع الذاتي $|-2E\rangle$ لابد من إختيار $d=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $c=\frac{1}{2}$ أي

$$|1,-2E\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle$$

أما الشعاع الذاتي المشترك الأخير فهو

$$|0,E\rangle = |3\rangle$$

7. (ا) حساب C

$$\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = |C|^2\left[1+\frac{1}{2}+1\right] = |C|^2\frac{5}{2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad C=\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

(ب) القيم التي يمكن الحصول عليها هي القيم الذاتية للمؤثر A و التي هي 1 و 0.
الإحتمالات هي

$$P(0) = |\langle 3|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{2}{5}\ ,\ P(1) = \sum_{i=1}^{2}|\langle i|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{2}{5}+\frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

(ج) حساب القيمة المتوسطة و الانحراف المربع المتوسط

$$\langle A\rangle = \langle\psi(0)|A|\psi(0)\rangle = \sum a_i P(a_i) = 0\ P(0) + 1\ P(1) = \frac{3}{5}.$$

$$A^2|1\rangle = A|1\rangle = 1|1\rangle\ ,\ A^2|2\rangle = A|2\rangle = 1|2\rangle\ ,\ A^2|3\rangle = 0|3\rangle$$

$$\Longrightarrow\qquad \langle A^2\rangle = \langle\psi(0)|A^2|\psi(0)\rangle = 0\ P(0) + 1\ P(1) = \frac{3}{5}$$

$$\Longrightarrow\qquad \sigma_A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} = \sqrt{\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{25}}.$$

التمرين الثاني:(6 نقاط)

مؤثر الطاقة للهزاز التوافقي يأخذ الشكل التالي:

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

حيث أن a هو مؤثر الخفض و يعطى بالعبارة التالية:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

1. عبارة مؤثر الرفع $a^\dagger$ و حساب $[a, a^\dagger]$

$$a^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x^\dagger - \frac{ip_x^\dagger}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$\begin{aligned}[a, a^\dagger] &= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar}\cancelto{0}{[x,x]} - \frac{i}{2\hbar}[x, p_x] + \frac{i}{2\hbar}[p_x, x] + \frac{1}{2\hbar m\omega}\cancelto{0}{[p_x, p_x]} \\ &= -\frac{i}{2\hbar}i\hbar + \frac{i}{2\hbar}(-i\hbar) = 1.\end{aligned}$$

2. حساب المبدل $[(a^\dagger)^n, H]$

$$\begin{aligned}[(a^\dagger)^n, H] &= \left[(a^\dagger)^n, \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\right] = \hbar\omega\left[(a^\dagger)^n, a^\dagger a\right] + \hbar\omega\cancelto{0}{\left[(a^\dagger)^n, \frac{1}{2}\right]} \\ &= \hbar\omega^\dagger\left[(a^\dagger)^n, a\right] = ... = -n\hbar\omega\left(a^\dagger\right)^n.\end{aligned}$$

3. (ا) أثبات أن الشعاع $(a^\dagger)^n|\varphi\rangle$ هو شعاع ذاتي لـ H

$$\begin{aligned}H\left(a^\dagger\right)^n|\varphi\rangle &= -\left[(a^\dagger)^n, H\right]|\varphi\rangle + \left(a^\dagger\right)^n H|\varphi\rangle \\ &= n\hbar\omega\left(a^\dagger\right)^n|\varphi\rangle + E\left(a^\dagger\right)^n|\varphi\rangle \\ &= (E + n\hbar\omega)\left(a^\dagger\right)^n|\varphi\rangle.\end{aligned}$$

(ب) من العبارة الأخيرة نستنتج أن القيمة الذاتية لمؤثر الطاقة H المرافقة للشعاع الذاتي $(a^\dagger)^n|\varphi\rangle$ هي $E + n\hbar\omega$.