جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي
كلية العلوم الدقيقة
قسم الفيزياء

امتحان مقياس جريان الموائع و انتقال الحرارة

سنة ثانية ماستر فيزياء
2018-2017
المدة: ساعة و نصف

التمرين الأول: 4 نقاط

نعتبر جريان يتميز بالكمون المركب الاتي:

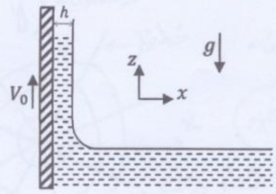
$$F(z) = A(\ln r + i\,\theta)$$

حيث $z = re^{i\theta}$

1- أوجد دالتي الكمون (Φ) و التيار (Ψ) لهذا الجريان.
2- ماذا تمثل خطوط التيار و خطوط تساوي الكمون (برر اجابتك).
3- أوجد مركبات السرعة لهذا الجريان.

التمرين الثاني: 8 نقاط

نعتبر شريحة زجاجية مغموسة جزئيا داخل سائل لزج و تسحب شاقوليا نحو الأعلى بسرعة ثابتة V_0 (لاحظ الشكل -1-)، بسبب قوى اللزوجة سيتبع الشريحة خلال حركتها الصاعدة طبقة رقيقة من السائل سمكها h، و من جهة أخرى فان قوى الجاذبية تعمل على انزال هذه الطبقة من السائل نحو الأسفل. نفرض أن هذا الجريان رقائقي، دائم، أحادي الاتجاه و أحادي البعد. و ليكن ρ و μ الكتلة الحجمية و معامل اللزوجة الديناميكية لهذا السائل على التوالي.



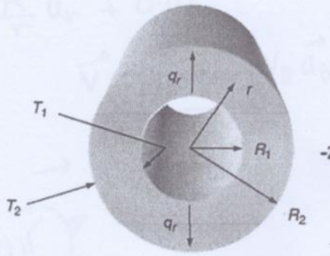
الشكل -1-

1- باستعمال معادلة الاستمرارية أثبت أن مركبة السرعة w لا تتعلق بـ z.
2- عندما تكون حركة طبقة السائل متصاعدة كليا، أثبت أن: $-\rho g + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
3- أكتب الشروط الحدية التي يخضع لها هذا الجريان.
4- أوجد عبارة توزيع السرعة لطبقة السائل.
5- أوجد عبارة التدفق الحجمي لهذا الجريان في وحدة عرض الشريحة الزجاجية.
6- أوجد عبارة السرعة المتوسطة.
7- أوجد عبارة اجهاد القص.

التمرين الثالث: 8 نقاط

نعتبر أسطوانة مجوفة نصفي قطريها الداخلي و الخارجي هما على التوالي $R_1 = 9\,cm$ و $R_2 = 18\,cm$، درجة حرارة السطحين الداخلي و الخارجي هما $T_1 = 180\,°C$ و $T_2 = 75\,°C$ (الشكل -2-). الناقلية الحرارية للأسطوانة هي $\lambda = 18\,W/mK$. نعتبر التوصيل الحراري الراكد و المستقر و أحادي الاتجاه.

1- أكتب المعادلة العامة للتوصيل الحراري ثم بسطها.
2- انطلاقا من المعادلة العامة للتوصيل الحراري أوجد عبارة التيار الحراري العابر للأسطوانة في وحدة الطول ثم أحسبه.
3- نريد تحسين التبادل الحراري بين الأسطوانة و المائع المحيط بها. من أجل ذلك، نقوم بوضع زعانف متماثلة (شكلها حلقي) على السطح الخارجي للأسطوانة حيث نصف قطرها الخارجي هو $R_3 = 21\,cm$ و سمكها $b = 0.15\,cm$. نقبل أن جميع الزعانف لها نفس درجة الحرارة T_2 و أن التبادل الحراري بين الزعانف و المائع ينجز بنفس المعامل h. المطلوب هو حساب عدد الزعانف الواجب إضافتها في وحدة طول الأسطوانة من أجل مضاعفة التيار الحراري النافذ مرتين.



الشكل -2-

- التصحيح النموذجي -

التمرين الأول:

1- لدينا:

$$F(z) = A(\ln r + i\theta)$$
$$= (A\ln r) + i(A\cdot\theta)$$

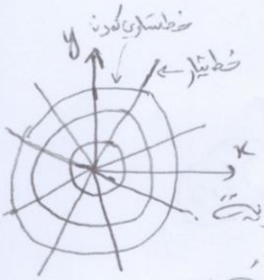
ومن جهة أخرى لدينا: (0.5ن)

$$F(z) = \phi + i\psi$$

حيث: ϕ تمثل دالة الكمون و ψ تمثل دالة التيار.

إذن بالمطابقة نجد: (0.5ن) (0.5ن)

$$\boxed{\psi = A\theta} \quad و \quad \boxed{\phi = A\ln r}$$



2- خطوط التيار تحقق $\psi = cste$ ومنه:

(0.25ن) $A\theta = cste \rightarrow \theta = cste \ (\forall r)$

(0.5ن) ومنه فإن خطوط التيار تمثل مستقيمات قطرية.

- أما خطوط تساوي الكمون تحقق $\phi = cste$ ومنه:

(0.25ن) $A\cdot\ln r = cste \rightarrow r = cste \ (\forall\theta)$

(0.5ن) ومنه فإن خطوط تساوي الكمون تمثل دوائر مركزها O ونصف قطرها r.

3- لدينا:

(0.5ن)
$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{u_\theta}$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}(A\ln r)\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(A\ln r)\vec{u_\theta}$$
$$= \frac{A}{r}\vec{u_r} + 0\cdot\vec{u_\theta}$$

ومنه:

$$\vec{V} = V_r\vec{u_r} + V_\theta\vec{u_\theta} = \frac{A}{r}\vec{u_r} + 0\vec{u_\theta}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} V_r = \frac{A}{r} \\ V_\theta = 0 \end{array}}$$

(0.5ن)

التمرين الثاني:

1- حسب معادلة الاستمرارية لدينا: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div \vec{V} = 0$ — 0,25

بما أن الجريان دائم وغير قابل للانضغاط إذن: $\frac{d\rho}{dt} = 0$ — 0,25

$\rightarrow div \vec{V} = 0$ — 0,25

$\rightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ — 0,25

من المعطيات لدينا: $u = v = 0$ ومنه:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

ومنه فإن مركبة السرعة w لا تتعلق بـ z.

2- حسب معادلة نافيير وستوكس لدينا:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad} P + \mu \Delta \vec{V} = 0$$ — 0,25

بالإسقاط على المحور z:

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\rho g + \mu \Delta w \quad : \left(\frac{\partial P}{\partial z} = 0\right)$$ — 0,25

$$\rightarrow \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\rho g + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

لدينا:

0,25 — $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$: الجريان دائم

$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$: من السؤال الأول.

0,25 — $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$: الجريان متماثل وفق المحور y.

$u = v = 0$: من المعطيات.

ومنه:

$$\boxed{-\rho g + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0}$$

0,5 0,5

$$\begin{cases} x = 0 \longrightarrow w = V_0 \\ x = h \longrightarrow \mu \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases}$$: (اجهاد القص معدوم عند السطح الحر)

4)- عبارة توزيع السرعة :

من السؤال الثاني لدينا ،

$$-\rho g + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\rho g}{\mu}$$

$$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\rho g}{\mu} x + C_1$$

0,5

$$\rightarrow w(x) = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2$$

ايجاد C_1 و C_2 باستعمال الشروط الحدية :

$$w(x=0) = V_0 \longrightarrow \boxed{C_2 = V_0}$$ 0,5

0,5

$$\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=h} = 0 \rightarrow \mu \left[\frac{\rho g}{\mu} h + C_1\right] = 0 \rightarrow \boxed{C_1 = \frac{-\rho g h}{\mu}}$$

ومنه :

$$w(x) = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g h}{\mu} x + V_0 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{w(x) = V_0 + \frac{\rho g}{\mu}\left(\frac{x^2}{2} - h x\right)}$$ 0,5

5)- عبارة التدفق الحجمي :

$$q_v = \int_0^1\int_0^h w(x)\, dx\, dy = \int_0^h w(x)\, dx$$ 0,5

$$q_v = \int_0^h \left[V_0 + \frac{\rho g}{\mu}\left(\frac{x^2}{2} - h x\right)\right] dx = \left[V_0 x + \frac{\rho g}{\mu}\left(\frac{x^3}{6} - h\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^h$$

$$\longrightarrow q_v = V_0 h + \frac{\rho g}{\mu}\left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{2}\right) \rightarrow \boxed{q_v = V_0 h - \frac{\rho g h^3}{3\mu}}$$

6)- عبارة السرعة المتوسطة :

لدينا: $q_v = V_{moy} \cdot S$ ومنه : $V_{moy} = \frac{q_v}{S}$ 0,1

$$V_{moy} = \frac{q_v}{h \cdot 1} \longrightarrow \boxed{V_{moy} = V_0 - \frac{\rho g h^2}{3\mu}}$$

0,1

7)- عبارة اجهاد القص :

0,1

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial x} = \mu \left[\frac{\rho g}{\mu} (x - h) \right]$$

$$\rightarrow \boxed{\tau = \rho g (x - h)}$$

0,1

0,1 $\rho c \dfrac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + \dot{q}$

التوصيل الحراري المستقر ← $\dfrac{dT}{dt} = 0$

التوصيل الحراري الراكد ← $\dot{q} = 0$

ومنه نجد : $\boxed{\Delta T = 0}$ 0,1

2 - لدينا :

$$\Delta T = 0 \longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$

$$\longrightarrow r\frac{\partial T}{\partial r} = C_1$$

$$\longrightarrow T(r) = C_1 \ln r + C_2$$ 0,1

باستعمال الشروط الحدية :

0,1 $$\begin{cases} r = R_1 \longrightarrow T = T_1 \\ r = R_2 \longrightarrow T = T_2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} T_1 = C_1 \ln R_1 + C_2 \\ T_2 = C_1 \ln R_2 + C_2 \end{cases}$$

حل هذه الجمل يعطي :

$$\boxed{C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}}} \qquad \boxed{C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_1}$$

0,25 0,25

حسب علاقة فوري لدينا :

$$q_r = -\lambda A \frac{dT}{dr} = -\lambda (2\pi r L) \cdot \frac{C_1}{r}$$

0,1

$$\longrightarrow \boxed{\frac{q_r}{L} = -2\pi\lambda\left(\frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}}\right)}$$ 0,1

0,1

$$\frac{q_r}{L} = -2(3,14)(18)\left(\frac{180 - 75}{\ln\left(\frac{9}{18}\right)}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{q_r}{L} = 17,123\ \frac{kW}{m}}$$

0,5 $\phi' = h\left(N \cdot A_i + \bar{A}\right)\left(T_2 - T_\infty\right)$

حيث:

0,5

(مساحة سطح زعنفة واحدة): $A_i = 2\pi R_3 b + 2\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)$

(مساحة الأسطح الغير مغطاة بالزعانف): $\bar{A} = 2\pi R_2\left(1 - N \cdot b\right)$

0,5

بوضع: $\phi' = 2\phi$ حيث:

(التدفق الحراري المتبادل بدون زعانف): $\phi = h\left(2\pi R_2 \cdot 1\right)\left(T_2 - T_\infty\right)$.

ومنه يكون:

0,5 0,5

$$h\left\{N\left[2\pi R_3 b + 2\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)\right] + 2\pi R_2\left(1 - Nb\right)\right\}\left(T_2 - T_\infty\right) =$$

$$= 2h\left(2\pi R_2 \cdot 1\right)\left(T_2 - T_\infty\right)$$

$$N\left[2\pi R_3 b + 2\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)\right] + 2\pi R_2\left(1 - Nb\right) = 4\pi R_2$$

$$\rightarrow N\left[2\pi R_3 b + 2\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)\right] + R_2 - \left(R_2 \cdot b\right) \cdot N = 2R_2$$

$$\rightarrow N\left[R_3 b + R_3^2 - R_2^2\right] + R_2 - \left(R_2 \cdot b\right) \cdot N = 2R_2$$

$$\rightarrow N\left[R_3 b + R_3^2 - R_2^2 - R_2 b\right] = R_2$$

$$\rightarrow \boxed{N = \frac{R_2}{\left(R_3 - R_2\right)\left(R_3 + R_2 + b\right)}}$$ 1

تطبيق عددي:

$$N = \frac{0{,}18}{\left(0{,}21 - 0{,}18\right)\left(0{,}21 + 0{,}18 + 0{,}0015\right)}$$

$$\rightarrow N = 15{,}32$$ 0,5

ومنه فعدد الزعانف الواجب اضافتها في وحدة طول الأسطوانة هو 15 زعنفة.