جامعة حمة لخضر
الوادي
قسم الرياضيات

امتحان في مقياس
التحويلات التكاملية

3 رياضيات
08سا — 09سا,30

التمرين الأول :

$(E, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس ، μ قياس منتهي .

1. أثبت أن $\mathcal{L}^{\infty}(\mu) \subset \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{L}^{p}(\mu)$
ومن أجل كل f . $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2. ليكن $p, p' \in [1, +\infty[$ (ليس بالضرورة مترافقين) .
أثبت أنه اذا كانت $f \in \mathcal{L}^{p} \cap \mathcal{L}^{p'}$ فإن $f \in \mathcal{L}^{r}$ من أجل كل r محصورة بين p, p' .

3. أثبت أنه اذا كانت $f \in \mathcal{L}^{p}$ ، $g \in \mathcal{L}^{q}$ مع $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$
فإن $f.g \in \mathcal{L}^{r}$ و $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \bullet \|g\|_q$

4. ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$. $f(x) = \sin x \, \chi_{]0, \pi[}(x)$
ولتكن المتتالية $f_n(x) = f(x - n\pi)$. عين $\operatorname{supp} f_n$ ، تسند f_n.

التمرين الثاني :

1. أوجد تحويل فورييه للتابع f المعرف بـ : $f(x) = (1 - |x|)\, \chi_{]-1,1[}(x)$

2. أثبت أن
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$
حيث ، $F(\lambda) = F[f(x)](\lambda)$ تحويل فورييه للتابع f .

3. أحسب
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$$

4. باستعمال تحويل فورييه أوجد حل المعادلة $\int_{\mathbb{R}} f(x-t) f(t)\, dt = \frac{1}{x^2+1}$

التمرين الثالث :

نعتبر $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$ تحويل لابلاس للتابع f .

1. بين أن $\mathcal{L}\left(\int_0^x f(t)\, dt\right)(p) = \frac{F(p)}{p}$.
ثم استنتج
$\mathcal{L}\left(\int_0^x \cos 3u \, du\right)(p)$.

2. بين أنه اذا كانت $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ متقاربة فإنه
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(u)\, du$$
ومن ذلك عين قيمة I حيث $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

4. باستعمال تحويل لابلاس أوجد حل
$y'' - 3y' + 2y = \sin x \qquad y(0) = y'(0) = 1$.

جامعة حمه لخضر
الوادي
قسم الرياضيات

امتحان في القياس
التحويلات التكاملية

3 رياضيات
30/09/08

التمرين الأول:

$(E, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس، μ قياس منتهي.

1. أثبت أن $\mathcal{L}^{\infty}(\mu) \subset \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{L}^{p}(\mu)$ ومن أجل كل f. $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
2. ليكن $p, p' \in]1, +\infty[$، (ليس بالضرورة مترافقين). أثبت أنه اذا كان $f \in \mathcal{L}^{p} \cap \mathcal{L}^{p'}$ فإن $f \in \mathcal{L}^{r}$ من أجل كل r محصوره بين p, p'.
3. أثبت أنه اذا كان $f \in \mathcal{L}^{p}$، $g \in \mathcal{L}^{q}$ مع $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ فإن $f.g \in \mathcal{L}^{r}$ و $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$
4. ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$. $f(x) = \sin x \, \chi_{]0,\pi[}(x)$ ولتكن المتتالية $f_n(x) = f(x - n\pi)$. عين $\operatorname{supp} f_n$ ...

التمرين الثاني:

1. أوجد تحويل فورييه للتابع f المعرف بـ: $f(x) = (1 - |x|)\, \chi_{]-1,1[}(x)$
2. أثبت أن
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$
حيث، $F(\lambda) = F[f(x)](\lambda)$ تحويل فورييه للتابع f.
3. أحسب
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$$
4. باستعمال تحويل فورييه أوجد حل المعادلة $\int_{\mathbb{R}} f(x-t) f(t)\, dt = \frac{1}{x^2+1}$

التمرين الثالث:

نعتبر $L(f(t))(p) = F(p)$ تحويل لابلاس للتابع f.

1. بين أن $L\left(\int_0^x f(t)\, dt\right)(p) = \frac{F(p)}{p}$.
ثم استنتج
$L\left(\int_0^x \cos 3u \, du\right)(p)$.
2. بين أنه اذا كان $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ متقارب فإنه
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(u)\, du$$
ومن ذلك عين قيمة I حيث $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
4. باستعمال تحويل لابلاس أوجد حل
$$y'' - 3y' + 2y = \sin x \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

ورقة إضافية .1.

جامعة حمه لخضر لتصحيح امتحان مقياس 2017/05/07

الوادي التحويلات التكاملية

التمرين الأول فضاء مقاس (E, M, μ)

لنفرض أن μ مقاس منتهي $(\mu(E) < \infty)$, $f \in \mathcal{L}^\infty$

أي أن $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ من أجل المتقريبا

تقريبا $x \in E$

من أجل كل $p \in [1, +\infty[$

$$\int_E |f|^p d\mu \leq \int_E \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \int_E d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(E) < \infty$$

ومنه :

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ من أجل كل $p \in [1, +\infty[$

أي أن $\Rightarrow f \in \bigcap \mathcal{L}^p(\mu)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^\infty(\mu) \subset \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{L}^p, \ p \geq 1.$$

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \|f\|_\infty \mu(E)^{\frac{1}{p}} \qquad \|f\|_\infty = \sup|f|$$

ومنه

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \leq \lim_{p \to +\infty} \|f\|_\infty \mu(E)^{1/p} = \|f\|_\infty \ \ldots \ (*)$$

من جهة أخرى، من أجل كل :

$0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$ لدينا

$$\int_E |f|^p d\mu \geq \int_{|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)} |f|^p d\mu \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon))$$

من أجل كل $p \in [1, +\infty[$

$$\|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \mu(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon))^{1/p}$$

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)$$

لما $\varepsilon \longrightarrow 0$ نجد

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty \ \ldots \ (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

(2) لنفرض أن $p, p' \in [1, +\infty[$ و $p > p'$

$$p' \leq r < p$$

$$|f|^r = |f|^r \chi_{|f| > 1}(x) + |f|^r \chi_{|f| < 1}(x) \leq \|f\|^p \chi_{|f| > 1}(x) + \|f\|^{p'} \chi_{|f| < 1}(x)$$

$$\Rightarrow \int_E |f|^r d\mu \leq \int_E |f|^p d\mu + \int_E |f|^{p'} d\mu < \infty$$

إذن $f \in \mathcal{L}^r$

ورقة إضافية ./.

(3) الحل

$f_1 = f^r$, $g_1 = g^r$

لدينا

$$\int_E |f_1|^{p/r} du = \int (|f|^r)^{p/r} du = \int |f|^p du < \infty$$

$$\Rightarrow f_1 \in \mathcal{L}^{p/r}(\mu)$$

$$\int |g_1|^{q/r} du = \int |g|^q du < \infty \Rightarrow g_1 \in \mathcal{L}^{q/r}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{(p/r)} + \frac{1}{(q/r)} = 1$$

$$\frac{r}{p} < 1, \quad \frac{r}{q} < 1 \Rightarrow \frac{p}{r} > 1, \quad \frac{q}{r} > 1.$$

$$\Rightarrow \frac{p}{r}, \frac{q}{r} \in]1, +\infty[$$

$$\int_E |fg|^r du = \int_E |f_1 g_1| du \leq \left(\int |f_1|^{p/r} du\right)^{r/p} \cdot \left(\int_E |g_1|^{q/r} du\right)^{r/q}$$

$$\leq \left(\left(\int |f|^p du\right)^{1/p} \cdot \left(\int |g|^q\right)^{1/q}\right)^r$$

$$< \infty \Rightarrow fg \in \mathcal{L}^r(\mu)$$

$$\|fg\|_r = \left(\int |fg|^r du\right)^{1/r} \leq \left(\int |f|^p du\right)^{1/p} \cdot \left(\int |g|^q du\right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q .$$

(4)

$$f(x) = \sin x \; \chi_{]0,\pi[}(x)$$

$$f_n(x) = f(x - n\pi)$$

$$= \sin(x - n\pi) \; \chi_{]0,\pi[}(x - n\pi)$$

$$0 < x - n\pi < \pi \Rightarrow n\pi < x < (n+1)\pi .$$

$$\operatorname{supp} f_n = [n\pi, (n+1)\pi]$$

التمرين (2):

$$f(x) = (1 - |x|) \chi_{|x| < 1}(x)$$

تحويل فورييه لـ f

$$F(f(t))(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \int_{-1}^{1} (1 - |x|) e^{-i\lambda t} dt$$

$$= \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-i\lambda t} dt + \int_{0}^{1} (1-t) e^{-i\lambda t} dt$$

ورقة إضافية

$$= \int_{-1}^{0} e^{-i\lambda t}\, dt + \int_{-1}^{0} t\, e^{-i\lambda t}\, dt + \int_{0}^{1} e^{-i\lambda t}\, dt + \int_{0}^{1} -t\, e^{-i\lambda t}\, dt \quad \text{(I)}$$

$$= \left[-\frac{1}{i\lambda} e^{-i\lambda t}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{i\lambda} e^{-i\lambda t}\right]_{0}^{1} + \int_{-1}^{0} t\, e^{-i\lambda t}\, dt - \int_{0}^{1} t\, e^{-i\lambda t}\, dt$$

حساب التكاملين

$$* \int_{-1}^{0} t\, e^{-i\lambda t}\, dt = \left[-\frac{1}{i\lambda} t\, e^{-i\lambda t}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{i\lambda}\int_{-1}^{0} e^{-i\lambda t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\left[1 - e^{i\lambda}\right]$$

$$* \int_{0}^{1} t\, e^{-i\lambda t}\, dt = \left[-\frac{1}{i\lambda} t\, e^{-i\lambda t}\right]_{0}^{1} + \frac{1}{i\lambda}\int_{0}^{1} e^{-i\lambda t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{i\lambda} e^{-i\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\left[e^{-i\lambda} - 1\right]$$

$$(1) = -\cancel{\frac{1}{i\lambda}} + \cancel{\frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda}} - \cancel{\frac{1}{i\lambda} e^{-i\lambda}} + \cancel{\frac{1}{i\lambda}} - \cancel{\frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda}} + \frac{1}{\lambda^2}\left[1 - e^{i\lambda}\right]$$

$$+ \cancel{\frac{1}{i\lambda} e^{-i\lambda}} - \frac{1}{\lambda^2}\left[e^{-i\lambda} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left[2 - e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}\left[1 - \frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}}{2}\right] = \frac{2}{\lambda^2}\left[1 - \cos\lambda\right]$$

$$= \frac{4}{\lambda^2}\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{f(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda\right)\overline{f(x)}\, dx \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\left(\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda t}\, dt}\right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\,\overline{F(\lambda)}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2\, d\lambda$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2\, d\lambda = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx$$

ورقة إضافية ./.

$$F(\lambda) = \frac{4}{\lambda^2}\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}$$

$$\int_0^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (1-|x|)^2 dx$$

$$= \pi \left[\int_{-1}^{0} (1+x)^2 dx + \int_0^1 (1-x)^2 dx \right.$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3}(1+x)^3 \right]_{-1}^{0} - \left[\frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4} d\lambda = \frac{2\pi}{3}$$

نضع $\frac{\lambda}{2} = x \Rightarrow d\lambda = 2\,dx$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t) f(t)\, dt = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow (f * f)(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad (4)$$

$$\Rightarrow F[(f*f)(x)](\lambda) = F\left[\frac{1}{x^2+1}\right](\lambda)$$

$$[F(f(x))(\lambda)]^2 = \pi e^{-|\lambda|}$$

$$F[f(x)](\lambda) = \sqrt{\pi}\, e^{-|\frac{\lambda}{2}|}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2 e^{-|\frac{\lambda}{2}|} = 2\sqrt{\pi}\, F\left[\frac{1}{1+4x^2}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{1+4x^2}$$

التمرين (03) :

$g'(x) = f(x) \Leftarrow g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ نضع

$g(0) = 0$

$$L(g'(x))(P) = L(f(x))(P) = F(P)$$

$$P\,L(g(x))(P) - g(0) = F(P)$$

$$L(g(x))(P) = \frac{F(P)}{P}$$

$$L\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)(P) = \frac{F(P)}{P}$$

نضع $f(t) = \cos 3t$

$$L(f(t))(P) = L(\cos 3t)(P) = \frac{P}{P^2+9}$$

$$L\left(\int_0^x \cos 3t\,dt\right)(P) = \frac{F(P)}{P} = \frac{P}{P(P^2+9)} = \frac{1}{P^2+9}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{P^2+9} = L\left(\frac{1}{3}\sin 3\right)$$

(2)

$$F(P) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-Pt}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} F(P)\,dP = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-Pt}\,dt\right)dP$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-Pt}\,dP\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\left[-\frac{f(t)}{t}e^{-Pt}\right]_0^{+\infty} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-Pt}\,dt$$

$$\lim_{P\to 0}\int_P^{+\infty} F(u)\,du = \lim_{P\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-Pt}\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} F(u)\,du = \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$L\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)(P) = \int_0^{+\infty} L(\sin t)(u)\,du$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du = \left[\arctan u\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

(3)

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

$$P^2Y - Py(0) - y'(0) - 3\left[PY - y(0)\right] + 2Y = \frac{1}{P^2+1}$$

ورقة إضافية .1.

$$\left[p^2-3p+2\right]Y = p-2+\frac{1}{p^2+1} \Rightarrow Y = \frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)(p-2)(p^2+1)}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p-1}+\frac{1}{10}\left[\frac{3p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{5}{p-1}+\frac{2}{p-2}\right]$$

$$= \mathcal{L}(e^t)+\frac{1}{10}\mathcal{L}\left(3\cos t+\sin t-5e^t+2e^{2t}\right)$$

$$= \mathcal{L}\left(e^t+\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t-\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{5}e^{2t}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}e^t+\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t$$

ملاحظة :

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2-3p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+1}+\frac{cp+d}{p^2-3p+2}$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{3p+1}{p^2+1}+\frac{-3p+8}{p^2-3p+2}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{3p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{5}{p-1}+\frac{2}{p-2}\right].$$

Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

$3_{ème}$ année Mathématique LMD
Date : 07/05/2017. Duré : 1h30m

Contrôle du matière X

Exercice 1.(6pts)
Soit l'équation différentielle du second ordre à conditions initiales :

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) = y(t), & t \in \mathbb{R}^+, \\ y(0) = 1, \text{ et } y'(0) = -1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Ecrire cette équation différentielle sous la forme d'un système différentiel de deux équations différentielles d'ordre un. (2pts)
2. Appliquer la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) à ce problème, avec $h = 0,2$ puis evaluer la solution en $t = 0,6$. (4pts)

Exercice 2.(7pts)
Soit le problème à valeur initiale :

$$y' = (y - x - 1)^2 + 2, \quad y(0) = 1.$$

1. Trouver la solution exact de ce problème. (2pts)
   Indication : utilisé $z = y - x - 1$.
2. Donner la définition de méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). (2,5pts)
3. Calculer y_1 par Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) avec $h = 0,1$ et comparer à la solution exacte. (2,5pts)

Exercice 3. (7pts)
Dans cet exercice on s'intéresse à des schémas numériques pour le problème :

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u_x(x,t) - 3u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in]0,1[\times]0,T[, \\ u(1,t) = u(0,t) = 0, & t \in]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in]0,1[. \end{cases} \tag{2}$$

Où u_0 et $T > 0$ sont donnés .

1. Donner un schéma d'approximation de (2) différences finies à pas constant et centré en espace et Euler explicite à pas constant en temps. (3pts)
2. Montrer que l'erreur de consistance est majorée par $C(k + h^2)$, avec C dépendant de la solution exacte de (2). (4pts)

La Solution d'Examen matière X ; 3ème Math

Ex(01): $(1): \begin{cases} y'' - 2y' = y & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \; ; \; y'(0) = -1 \end{cases}$

1/- en posant : $z_1 = y$; et $z_2 = y'$ — 0,5 / 0,5

on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} z_2 = z_1' \\ z_2' - 2z_2 - z_1 = 0 \\ z_1(0) = 1 \; , \; z_2(0) = -1 \end{cases}}$$ — 01 — 02

2/- on pose $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, et $Z^i = \begin{pmatrix} z_1^i \\ z_2^i \end{pmatrix}$,

on a : L'algorithme de RK2 :

$$\boxed{\begin{cases} Z^{i+1} = Z^i + \frac{h}{2}(K_1^i + K_2^i) \; ; \text{ où} \\ K_1^i = f(t_i, Z^i) \; ; \; K_2^i = f(t_i + h, Z^i + hK_1^i) \end{cases}}$$ — 01

avec $\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_1 + 2z_2 \end{cases}$

i.e $\boxed{f(t, Z) = (z_2, z_1 + 2z_2)^t.}$ — 01

3/ • $Z^1 = Z^0 + 0{,}1(K_1^0 + K_2^0)$ / $Z^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$K_1^0 = f(t_0, Z^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $K_2^0 = f(t_0 + h, Z^0 + hK_1^0)$

$K_2^0 = f(t_0 + h, (0{,}8, -1{,}2)^t) = \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}6 \end{pmatrix}$

$Z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix} -2{,}2 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}78 \\ -1{,}26 \end{pmatrix}}$ — 01

Z^2/ • $K_1^1 = f(t_1, Z^1) = \begin{pmatrix} -1{,}26 \\ -1{,}74 \end{pmatrix}$; $K_2 = f(t_1 + h, Z^1 + hK_1^1) = \begin{pmatrix} 0{,}528 \\ -1{,}608 \end{pmatrix}$

$Z^2 = Z^1 + 0{,}1(K_1^1 + K_2^1) = \begin{pmatrix} 0{,}78 \\ -1{,}26 \end{pmatrix} + 0{,}1\left[\begin{pmatrix} -1{,}26 \\ -1{,}74 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}528 \\ -1{,}608 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0{,}7068 \\ -1{,}5948 \end{pmatrix}$ — P.01

$\underline{Z^3 \simeq Z(0,6)}$:

$K_1^2 = f(t_2, z^2) = \begin{pmatrix} -1,5948 \\ -2,4828 \end{pmatrix}$; $K_2^2 = \begin{pmatrix} -2,09136 \\ -3,79488 \end{pmatrix}$

$z^3 = z^2 + 0,1(K_1^2 + K_2^2) = \begin{pmatrix} 0,7068 \\ -1,5948 \end{pmatrix} + 0,1\left[\begin{pmatrix} -1,5948 \\ -2,4828 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2,09136 \\ -3,79488 \end{pmatrix}\right]$

$\boxed{z^3 = \begin{pmatrix} 0,3381184 \\ -2,222568 \end{pmatrix}}$ 01 04

• donc : $\boxed{y_3 = 0,3381184}$ 0,5

$\underline{Ex(02)}$:

1/ $z = y - x - 1 \Rightarrow z' = y' - 1$

$z' + 1 = z^2 + z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2+1} = dx$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}(z) = x + C$

$\Rightarrow z = tg(x + C)$

$\Rightarrow y - x - 1 = tg(x + C)$

ou $\underline{y = tg(x + C) + x + 1}$ 01 02

• pour $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = tg(C) + 1 \Rightarrow tg\, C = 0 \Rightarrow \underline{C = 0}$,

on a : $\boxed{y = tg(x) + x + 1}$ 01

2/ $\begin{cases} y_{i+1} = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(t_i, y_i) ; K_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1), \\ K_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2), K_4 = f(t_i + h, y_i + hK_2) \end{cases}$ 0,5 0,5 0,5 0,5 2,5

3/ $y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$. 0,5

p.02

$y_0 = 1$; $K_1 = f(x_0, y_0) = (1-0-1)^2 + 2 = \underline{2}$,

$K_2 = f(0{,}05, 1{,}1) = (1{,}1 - 0{,}05 - 1)^2 + 2 = \underline{2{,}0025}$,

$K_3 = f(0{,}05, 1{,}100125) = \underline{2{,}0025\ldots}$

$K_4 = f(0{,}1, 1{,}4005) = \underline{2{,}0903\ldots}$

0,5

$\boxed{y_1 = 1{,}20167\ldots}$ 0,5 2,5

$y(0{,}1) = tg(0{,}1) + 0{,}1 + 1 = \underline{1{,}20033}$ 01

Ex(03): $(u_t = -u_x + 3u_{xx})$

1/ $\underline{\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = -\left(\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}\right) + 3\left(\dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}\right)}$ 03 03

ou k le pas de discrétisation de $[0, T]$, et h le pas de discrétisation de $[0, 1]$.

2/ Soit $\underline{\overline{u}_i^{(n)} = u(x_i, t_n)}$; on pose : 0,5

$$R_i^n = \underbrace{\frac{\overline{u}_i^{n+1} - \overline{u}_i^n}{k}}_{\overline{R}_i^n} + \underbrace{\frac{\overline{u}_{i+1}^n - \overline{u}_{i-1}^n}{2h}}_{\overline{\overline{R}}_i^n} - 3\underbrace{\frac{\overline{u}_{i+1}^n - 2\overline{u}_i^n + \overline{u}_{i-1}^n}{h^2}}_{\tilde{R}_i^n}$$ 01 04

$R_i^n = \overline{R}_i^n + \overline{\overline{R}}_i^n - 3\tilde{R}_i^n$

$\ast\ \overline{R}_i^n = \dfrac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k}$

$\cdot\ u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n + k) = u(x_i, t_n) + k\, u_t(x_i, t_n) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x_i, t_n + \theta_n)$ 01
$\cancel{+ \frac{k^3}{3!} u_{ttt}(x_i, t_n + \theta_n) / 0 \le \theta_n \le k}$

i.e. $\overline{R}_i^n = u_t(x_i, t_n) + \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, t_n + \theta_n) \cancel{+ \frac{k^2}{2} u_{ttt}(x_i, t_n + \theta_n)}$ ...... (1)

P.03

(2) $\overline{\overline{R}}_i^n = \dfrac{\overline{U}_{i+1}^n - \overline{U}_{i-1}^n}{2h} = \dfrac{U(x_{i+1}, t_n) - U(x_{i-1}, t_n)}{2h}$

$U(x_{i+1}, t_n) = U(x_i + h, t_n) = U(x_i, t_n) + h U_x(x_i, t_n) + \dfrac{h^2}{2} U_{xx}(x_i, t_n)$
$+ \dfrac{h^3}{6} U_{xxx}(x_i, t_n) + \dfrac{h^4}{4!} U_{xxxx}(x_i + \alpha_i, t_n) \; / \; 0 \le \alpha_i \le h.$

$U(x_{i-1}, t_n) = U(x_i - h, t_n) = U(x_i, t_n) - h U_x(x_i, t_n) + \dfrac{h^2}{2} U_{xx}(x_i, t_n)$
$- \dfrac{h^3}{6} U_{xxx}(x_i, t_n) + \dfrac{h^4}{4!} U_{xxxx}(x_i - \beta_i, t_n) \; / \; 0 \le \beta_i \le h.$

on a

$\overline{\overline{R}}_i^n = U_x(x_i, t_n) + \dfrac{h^2}{6} U_{xxx}(x_i, t_n) + \dfrac{h^3}{4!} \left(\dfrac{U_{xxx}(x_i + \alpha_i, t_n) - U_{xxx}(x_i + \beta_i, t_n)}{2} \right) \; \text{---} \; (2)$

0,5

(*) $\tilde{R}_i^n = \dfrac{\overline{U}_{i+1}^n - 2\overline{U}_i^n + \overline{U}_{i-1}^n}{h^2}$

$\overline{U}_{i+1}^n = U(x_i + h, t_n) = U(x_i, t_n) + h U_x(x_i, t_n) + \dfrac{h^2}{2} U_{xx}(x_i, t_n) +$
$\dfrac{h^3}{3!} U_{xxx}(x_i, t_n) + \dfrac{h^4}{4!} U_{xxxx}(x_i + \tilde{\alpha}_i, t_n) \; / \; 0 \le \tilde{\alpha}_i \le h$

$\overline{U}_{i-1}^n = U(x_i - h, t_n) = U(x_i, t_n) - h U_x(x_i, t_n) + \dfrac{h^2}{2} U_{xx}(x_i, t_n) -$
$\dfrac{h^3}{3!} U_{xxx}(x_i, t_n) + \dfrac{h^4}{4!} U_{xxxx}(x_i - \tilde{\beta}_i, t_n) \; / \; 0 \le \tilde{\beta}_i \le h.$

donc

$\tilde{R}_i^n = U_{xx}(x_i, t_n) + \dfrac{h^2}{4!} \left(U_{xxxx}(x_i + \tilde{\alpha}_i, t_n) + U_{xxxx}(x_i - \tilde{\beta}_i, t_n) \right) \; \text{---} \; (3)$

0,5

donc (1), (2), (3) $\Rightarrow$

$R_i^n = \underbrace{U_t(x_i, t_n) + U_x(x_i, t_n) - 3U_{xx}(x_i, t_n)}_{= 0} + \dfrac{k}{2} U_{tt}(x_i, t_n + \theta_i)$
$+ \dfrac{h^2}{6} U_{xxx}(x_i, t_n) + \dfrac{h^3}{4!} \left(\dfrac{U_{xxx}(x_i + \alpha_i, t_n) - U_{xxx}(x_i - \beta_i, t_n)}{2} \right)$
$+ \dfrac{h^2}{4!} \left(U_{xxxx}(x_i + \tilde{\alpha}_i, t_n) + U_{xxxx}(x_i - \tilde{\beta}_i, t_n) \right)$

0,5

donc $|R_i^n| \le C(k + h^2)$ // $C = \max \left\{ |U_{tt}(x,t)|, \left| \dfrac{U_{xxx}(x,t)}{6} \right|, \left| \dfrac{U_{xxxx}(x,t)}{4!} \right| \right\}$ 0,5

P. 04

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر . الوادي

كلية : تصحيح امتحان الهندسة التفاضلية

الإسم واللقب :

مقياس:

الرقم: الدفعة: الفوج: ثالثة رياضيات

التاريخ: 2016 - 2017

رقم التسجيل:

الرقم السري:

يمنع على الطالب وضع أي إشارة على ورقة الإمتحان

الرقم السري

العلامة

20/

حل ت 1

$\phi(u,v)=\phi(u',v') \Rightarrow$

$$\begin{cases} u+v=u'+v' \\ u-v=u'-v' \\ uv=u'v' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-u'=v'-v \\ u-u'=-(v'-v) \\ uv=u'v' \end{cases}$$ 01

$\Rightarrow u-u'=0 \quad v-v'=0$

$\Rightarrow (u,v)=(u',v') \quad \forall (u,v),(u',v')\in IR^2$

ومنه ϕ متباين

$$J_\phi(u,v) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{pmatrix} \quad \forall (u,v)\in IR^2$$ 01

2. بما أن ϕ متباين و $rang\, J_\phi(u,v)=2$

$\forall (u,v)\in IR^2$ (لأن $det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$) 02

إذن R منوعة جزئية من IR^3.

3. المعرفة تحقق

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$ 01

حيث $W(1,1,1)$ شعاع توجيه المستقيم

$x=y=z$

./.

ومنه

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & v \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2v-2=0 \qquad 01$$

$$\iff v = 1$$

أين المجموعة هي

$$\{(u+1, u-1, u) : u \in \mathbb{R}\}$$

(مستقيم).

4. 02

$$R : \begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \\ z = u\times v \end{cases} \iff \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \\ z = u\times v \end{cases}$$

$$\iff z = \frac{x+y}{2} \times \frac{x-y}{2}$$

حل ت 2:

1. F من الصنف C^∞ لأن

$$dF(I_d)(H) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{F(I_d+\lambda H) - F(I_d)}{\lambda} \qquad 02$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[{}^t(I_d+\lambda H) A (I_d+\lambda H) - A \right]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[\cancel{A} + \lambda\, {}^tHA + \lambda AH + \lambda^2\, {}^tHAH - \cancel{A} \right]$$

$$= {}^tHA + AH \quad \forall H \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\ker dF(I_d) = \{ H \in M_3(\mathbb{R}) \quad {}^tHA + AH = 0 \}$$ 2

$$= \{ H \in M_3(\mathbb{R}) \quad -{}^tH\,{}^tA + AH = 0 \}$$ 0.2

$$= \{ H \in M_3(\mathbb{R}) \quad -{}^t(AH) + (AH) = 0 \}$$

$$= \{ H \in M_3(\mathbb{R}) \quad AH \in S_3(\mathbb{R}) \}.$$

$$L : \ker dF(I_d) \longrightarrow S_3(\mathbb{R})$$ 3

$$H \longrightarrow AH$$

معرف جيدا

$$\ker L = \{ H \in \ker dF(I) \quad AH = 0 \}$$ 0.2

$$= \left\{ H \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ H \quad \begin{pmatrix} H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ -H_{11}+H_{31} & -H_{12}+H_{32} & -H_{13}+H_{33} \\ -H_{21} & -H_{22} & -H_{23} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ H = (H_{ij}) \quad \begin{matrix} H_{21} = H_{22} = H_{23} = 0 \\ H_{11} = H_{31} \quad H_{12} = H_{32} \quad H_{13} = H_{33} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ H_{11} & H_{12} & H_{13} \end{pmatrix} : H_{11}, H_{12}, H_{13} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \dim \ker L = 3$$

$$L(H) = \{ AH : H \in \ker dF(I_d) \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ -H_{11}+H_{31} & -H_{12}+H_{32} & -H_{13}+H_{33} \\ -H_{21} & -H_{22} & -H_{23} \end{pmatrix} : \begin{matrix} H_{22} = -H_{11}+H_{31} \\ -H_{22} = -H_{13}+H_{33} \\ H_{23} = -H_{21} \end{matrix} \right\}$$

$$AH = H_{23}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + H_{22}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$(-H_{12}+H_{31})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim L(H) = 3$

حسب نظرية الرتبة

$\dim \ker dF(Id) = 3+3 = 6$

ومنه $\dim M_3(\mathbb{R}) = \dim \ker dF(Id) + \text{rang}\, dF(Id)$

$\Rightarrow 9 = 3 + \text{rang}\, dF(Id)$

$\Rightarrow \text{rang}\, dF(Id) = 6$

4. نضع $G(M) = F(M) - A$ ، G من الصنف C^∞ و

$dG(Id) = dF(Id)$

$\text{rang}\, dG(Id) = 6$

إذن Σ منوعة مرتبة بجوار Id بعدها 6 من $M_3(\mathbb{R})$.

حل ت 13 لدينا:

$h(x,y,g(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in D$

نفاضل نسبيا لـ نجد مباشرة:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,g(x,y)) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,g(x,y)) = 0$$

ومنه باستعمال نظرية التوابع الضمنية.

Université d'El-Oued, 3ème année Licence Maths
Module : Introduction à la théorie des opérateurs
Contrôle final: le 14-05-2017 (90 min)

الاسم : ....
اللقب : ....
الفوج : ....

Exercice n°1: Soient $(H_1, (.,.)_{H_1})$, $(H_2, (.,.)_{H_2})$ deux espaces de Hilbert complexes et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.

1) Montrer que l'opérateur adjoint A^* est unique. (وحيد) .... (3 points)

2) Montrer que : $\|A^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} = \|A\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$. .... (3 points)

3) Montrer que : $(A^*)^* = A$. .... (3 points)

4) Montrer que : $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$. .... (3 points)

Exercice n°2: Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = C([0,2])$ muni de la norme $\|.\|_E$ où $\|x\|_E = \max_{0 \leq t \leq 2} |x(t)|$.

On pose $A_n : E \longrightarrow E \setminus A_n x = y$ où $y(t) = [A_n x](t) = x(t).e^{\frac{t}{n}}, \quad \forall t \in [0,2]$.

1) Trouver $\|A_n\|_{\mathcal{L}(E)}$ .... **(2 points)**

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n est inversible et trouver son inverse A_n^{-1} .... **(3+1 points)**

3) Est ce que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers I_E (i.e : $\lim_{n \to +\infty} \|A_n - I_E\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$) ? **(3 points)**

Université d'El-Oued, 3ème année Licence Maths
Module : Introduction à la théorie des opérateurs
Contrôle final: le .. -05-2017 (90 min)

الاسم : ....
اللقب : ....
الفوج : ....

Exercice n°1: Soient $(H_1, \langle .,. \rangle_{H_1})$, $(H_2, \langle .,. \rangle_{H_2})$ deux espaces de Hilbert complexes et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.

1) Montrer que l'opérateur adjoint A^* est unique. (وحيد) .... **(2 points)**

Supposons que A admet deux opérateurs adjoints A_1^* et A_2^*, donc on a :

$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 : \langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A_1^* y \rangle_{H_1} \overset{0,5}{=} \langle x, A_2^* y \rangle_{H_1} \overset{0,5}{\Rightarrow} \forall y \in H_2 : A_1^* y = A_2^* y$

(car $\forall x \in H_1 : \langle x, \alpha \rangle = \langle x, \beta \rangle \Rightarrow \alpha = \beta$) 0,5 (*) $\overset{déf}{\Longleftrightarrow} A_1^* = A_2^*$ 0,5

2) Montrer que : $\|A^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} = \|A\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$. .... **(3 points)** $(y \neq 0)$

$\|A^* y\|_{H_1}^2 = \langle A^* y, A^* y \rangle_{H_1} \overset{déf}{=} \langle AA^* y, y \rangle_{H_2} \overset{C.S}{\leqslant} \|AA^* y\|_{H_2} \cdot \|y\|_{H_2} \overset{\mathcal{L}}{\leqslant} \|A\|_{\mathcal{L}} \|A^* y\|_{H_1} \cdot \|y\|_{H_2}$ 0,5 0,5

$\Rightarrow \|A^* y\|_{H_1} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}} \cdot \|y\|_{H_2} \Rightarrow \sup_{0 \neq y \in H_2} \frac{\|A^* y\|}{\|y\|} = \|A^*\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}}$ 0,5 ... (I)

$\|Ax\|_{H_2}^2 = \langle Ax, Ax \rangle_{H_2} \overset{déf}{=} \langle x, A^* A x \rangle_{H_1} \overset{C.S}{\leqslant} \|A^* A x\|_{H_1} \cdot \|x\|_{H_1} \overset{\mathcal{L}}{\leqslant} \|A^*\| \|Ax\| \cdot \|x\|$ 0,5 0,5

$\Rightarrow \|Ax\|_{H_2} \leqslant \|A^*\|_{\mathcal{L}} \cdot \|x\| \Rightarrow \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|A^*\|_{\mathcal{L}}$ ... (II) $(x \neq 0)$

(I) $\wedge$ (II) $\Rightarrow \|A^*\|_{\mathcal{L}} = \|A\|_{\mathcal{L}}$ 0,5

3) Montrer que : $(A^*)^* = A$. .... **(3 points)**

On a : $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 : \langle Ax, y \rangle = \cancel{\langle y, Ax \rangle} \overset{déf}{=} \langle x, A^* y \rangle \overset{P}{=} \overline{\langle A^* y, x \rangle}$ 0,5 0,5

$\overset{déf}{=} \overline{\langle y, (A^*)^* x \rangle} \overset{P}{=} \langle (A^*)^* x, y \rangle$ 0,5. Donc $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 : \langle Ax, y \rangle = \langle (A^*)^* x, y \rangle$

D'après la propriété (*) on a : $\forall x \in H_1$, $Ax = (A^*)^* x$ 0,5 0,5

$\overset{déf}{\Longleftrightarrow} A = (A^*)^*$ 0,5 #

4) Montrer que : $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$. .... **(3 points)**

$\operatorname{Ker} A^* \overset{déf}{=} \{ y \in H_2 : A^* y = 0 \}$ $y \in \operatorname{Ker} A^* \Longleftrightarrow A^* y = 0$. 0,5

0,5 $\Longleftrightarrow \forall x \in H_1 : \langle x, A^* y \rangle_{H_1} = 0 \overset{0,5}{\Longleftrightarrow} \forall x \in H_1 : x \perp A^* y$

$\Longleftrightarrow \forall x \in H_1 : \langle Ax, y \rangle_{H_2} = 0 \Longleftrightarrow y \perp Ax, \ \forall x \in A$

0,5 $\Longleftrightarrow y \perp \{ Ax : x \in A \} = \operatorname{Im} A \overset{0,5}{\Longleftrightarrow} y \in (\operatorname{Im} A)^\perp$

Donc : $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$ 0,5

Exercice n°2: Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = C([0,2])$ menu de la norme $\|.\|_E$ où $\|x\|_E = \max_{0\le t\le 2}|x(t)|$.

On pose $A_n : E \longrightarrow E \setminus A_n x = y$ où $y(t) = [A_n x](t) = x(t).e^{\frac{t}{n}}, \quad \forall t \in [0,2]$.

1) Trouver $\|A_n\|_{\mathcal{L}(E)}$ .... **(2 points)**

$\|A_n x\|_E = \max_t |x(t)|.|e^{t/n}|$ $\le \max_{0\le t\le 2}|x(t)| \cdot \max_{0\le t\le 2} e^{t/n} \Rightarrow \|A_n x\|_E \le e^{2/n} \cdot \|x\|_E$ 0,5

$\Rightarrow \sup_{0\ne x\in E} \frac{\|A_n x\|_E}{\|x\|_E} = \|A_n\|_{\mathcal{L}} \le e^{2/n}$ 0,5 (I). Soit $x_0 \in E \setminus x_0(t)$

$\Rightarrow \begin{cases}\|x_0\|_E = 1 \\ Ax_0(t) = e^{t/n}\end{cases} \Rightarrow \frac{\|A x_0\|_E}{\|x_0\|_E} = e^{2/n}$ 0,5 $\le \sup \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = \|A_n\|_{\mathcal{L}}$

(I) $\wedge$ (II) $\Rightarrow \|A_n\|_{\mathcal{L}} = e^{2/n}$ 0,5, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n est inversible et trouver son inverse A_n^{-1} .... **(3+1 points)**

A_n est bijective car l'équation $y = A_n x$ admet 1 solution unique 0,5 0,5

En effet $y(t) = x(t)e^{t/n}, \forall t\in[0,2] \Leftrightarrow x(t) = y(t)e^{-t/n}, \forall t\in[0,2]$ 0,5

Donc $A_n^{-1} : E \longrightarrow E \setminus (A_n^{-1}x)(t) = x(t)e^{-t/n}$ 0,5 et on a :

$\|A_n^{-1}x\|_E \le \max_t |x(t)| \cdot \max_{0\le t\le 2} e^{-t/n} = \|x\|_E \cdot 1 = \|x\|_E$ 0,5 0,5 0,5

Ce qui montre que $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et d'où A_n est inversible. 0,5

et on peut montrer que $\|A_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3) Est ce que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers I_E (i.e : $\lim_{n\to+\infty}\|A_n - I_E\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$) ? (3 points)

On a : $\forall x\in E$, $\|A_n x - I_E x\|_E = \|(A_n - I_E)x\|_E = \max_t |x(t)e^{t/n} - x(t)|$ 0,5

$\le \max_t |x(t)| \cdot \max_{0\le t\le 2}|e^{t/n} - 1|$ 0,5

t	0	2
$1-e^{t/n}$	0	$\longrightarrow 1-e$

0,5

$\Rightarrow \|(A_n - I)x\|_E \le (e^{2/n} - 1)\|x\|_E, \forall x\in E$ 0,5

$\Rightarrow \sup_{0\ne x\in E}\frac{\|(A_n - I)x\|_E}{\|x\|_E} = \|A_n - I_E\|_{\mathcal{L}(E)} \le e^{2/n} - 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$ 0,5

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\|A_n - I_n\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$ 0,5 $\Rightarrow$ A_n CV unif vers I_E