

الإجابة النموذجية

الشعبة: رياضيات تطبيقية

التخصص: mathématiques appliquées

المادة: مادة التخصص



Faculté :

Sciences Exactes

Département :

Des Mathématiques

كلية العلوم الدقيقة

الرياضيات

كلية:

قسم:

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2021/2020

Concours d'accès au doctorat 3^e cycle, LMD 2020/2021

Spécialité :	Mathématiques appliquées.	الاختصاص:
Varlante :	1	الخيار رقم:
Epreuve :	Mathématiques appliquées / الرياضيات التطبيقية	اختبار:
Durée :	ساعتان	المدة:
Date :	6/3/2021	التاريخ:
		Coefficient :
		03
		Heure :
		15:00
		المعامل:
		التوقيت:

Exercice1 :(08pts)

On considère le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

où $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $T > 0$ et $a > 0$.

Ce problème admet une solution unique $u(x, t)$.

On se donne :

$$\Delta t = k = \frac{\tau}{N+1}, \quad t^n = nk, \quad n = 0; 1; \dots; N+1.$$

$$\Delta x = h, \quad x_i = ih \text{ et } i \in \mathbb{Z}.$$

On pose $\lambda = \frac{ak}{h}$.

1. Montrer que la solution u de (P) satisfait :

$$(1) \quad u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) - ak \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{1}{2} a^2 k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + O(k^3),$$

et si $\lambda = 1$: $u(x_i, t^{n+1}) = u(x_{i-1}, t^n)$.

2. Montrer que l'égalité (1), nous donne le schéma suivant :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \lambda (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \lambda^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) & n > 0, \quad i \in \mathbb{Z} \\ u_i^0 = u_0(x_i), & i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2.1. Donner l'ordre de consistance du schéma.

2.2. Etudier la stabilité du schéma pour la norme L^∞ .

Exercice2 :(07pts)

En un point M d'un solide élastique, l'état des contraintes est donné par le tenseur suivant

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & b \end{bmatrix} : a \text{ et } b \text{ sont deux constantes réelles.}$$

On a appelle σ_1, σ_2 et σ_3 les contraintes principales du σ où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. La troisième direction

associée à σ_3 est $X_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ et la contrainte tangentielle agissant au point M et $\tau_{\max} = 6$.

Déterminer les constantes a et b et les contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 .

Exercice 1 : (05pts)

On pose $I =]0, 1[$. On cherche dans cet exercice à résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u^3 = f, & \text{dans } I, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où f est une fonction continue donnée et α un paramètre réel positif donné.

1. Soient u_1 et u_2 deux fonctions de classe C^2 solutions du problème (1). Démontrer que l'on a

$$\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2 dx + \alpha \int_0^1 (u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2) dx = 0.$$

En déduire que l'on a nécessairement $u_1 = u_2$.

2. Montrer que toute solution $u \in C^2(]0, 1[)$ du problème (1) vérifie la formulation suivante

$$\forall v \in H_0^1(I), \quad \int_0^1 u'v' dx + \alpha \int_0^1 u^3 v dx = \int_0^1 f v dx. \quad (2)$$

3. On s'intéresse donc maintenant au problème suivant

Trouver $u \in H_0^1(I)$, vérifiant les équations (2). (P)

Pour tout $v \in H_0^1(I)$, on introduit la fonctionnelle énergie suivante

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx + \frac{\alpha}{4} \int_0^1 |v|^4 dx - \int_0^1 f v dx,$$

- 3.1. Démontrer que l'énergie E est minorée sur l'espace $H_0^1(I)$.

- 3.2. Soit $u \in H_0^1(I)$ telle que $E(u) = \inf\{E(v), v \in H_0^1(I)\}$.

Démontrer que la fonction u est une solution du problème (P).

2 : $\nabla \cdot \mathbf{E}$

On considère le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

tel que $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $T > 0$ et $a > 0$

Ce problème admet une solution unique $u(x, t)$

On se donne :

$$\Delta t = k = \frac{T}{N+1}; \quad t^n = nk, \quad n = 0, 1, \dots, N+1$$

$$\Delta x = h, \quad x_{i+1} - x_i = h, \quad i \in \mathbb{Z}$$

$$\text{On pose } \lambda = \frac{ak}{h}, \quad \lambda \neq 0$$

1 / Montrer que la solution u de (P) satisfait :

$$(1) \quad \begin{aligned} u(x_i, t^{n+1}) &= u(x_i, t^n) - ak \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) \\ &+ \frac{1}{2} a^2 k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + O(k^3). \end{aligned}$$

et

$$\text{Si } \lambda = 1 : u(x_i, t^{n+1}) = u(x_{i-1}, t^n).$$

2/ Montrer que l'égalité (1), nous donne le schéma suivant :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}\lambda(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\lambda^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) & n \geq 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) & i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- a/ Donner l'ordre de consistance du schéma.
- b/ Étudier la stabilité du schéma pour la norme L^∞ .

Ex 2 (usage) Solution:

1° le D.T de $u(x_i, t^{n+1})$ au voisinage de $u(x_i, t^n)$

est :

$$(1) u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) + o(\Delta t^3)$$

à partir de (P) on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{donc : } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a \left(-a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(1) devient :

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) - ak \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n)$$

$$+ \frac{1}{2} a^2 k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + o(k^3)$$

$$u(x_{i-1}, t^n) = u(x_i, t^n) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h^3)$$

$$\text{Si } \lambda = 1 : \left(\frac{ak}{h} = 1 \right) \Rightarrow h = ak.$$

$$\text{d'où : } u(x_i, t^{n+1}) = u(x_{i-1}, t^n).$$

2) de l'égalité (1), en déduire à partir de :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + o(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + o(h^2)$$

Donc : de (1) :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{ak}{2h} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{a^2 k^2}{2h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

d'où :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \lambda (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \lambda^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ u_i^0 = u_0(x_i) \quad i \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{matrix} n \geq 0 \\ i \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

a) Avant d'établir l'erreur de consistance, on va réécrire le schéma d'une manière plus simple comme suit : ($\lambda \neq 1$).

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - \frac{a^2 k}{2} \times \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0$$

Alors :

$$\frac{u(x_i, t^{n+1}) - u(x_i, t^n)}{k} + a \frac{u(x_{i+1}, t^n) - u(x_{i-1}, t^n)}{2h} - \frac{a^2 k}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) + o(k^2 + h^2)$$

$$= o(k^2 + h^2)$$

(2)

Donc: le schéma est consistant avec l'équation du transport advection aux en Temps et en espace.

Pour $\lambda = 1$, on obtient: $(u_i^{n+1} = u_{i-1}^n)$
 $\forall n, \forall i$

d'où: $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n = u_{i-2}^{n-2} = \dots = u_j^0 = u_0(n_j)$
 $j \in \mathbb{Z}$

3/ la stabilité:

on a:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \lambda u_{i+1}^n + \frac{1}{2} \lambda u_{i-1}^n + \frac{1}{2} \lambda^2 u_{i+1}^n - \lambda^2 u_i^n + \frac{1}{2} \lambda^2 u_{i-1}^n$$

donc:

$$u_i^{n+1} = (1 - \lambda^2) u_i^n + \frac{1}{2} (\lambda^2 - \lambda) u_{i+1}^n + \frac{1}{2} (\lambda^2 + \lambda) u_{i-1}^n$$

le schéma est stable en norme L^∞ si u_i^{n+1} est une combinaison convexe de u_i^n ;
 c. o. d:
 • la somme du terme égal à 1
 • Tous les termes sont positifs.

• $1 - \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda = 1$ Vérifiée.

• $(1 - \lambda^2) > 0$ et $\lambda(\lambda - 1) > 0$

pour $\lambda^2 + \lambda > 0$ Vérifiée car: $\lambda > 0$

$$\lambda = \frac{ak}{h} \quad (a > 0, k > 0, h > 0)$$

pour:

$$1 - \lambda^2 > 0 : 0 < \lambda \leq 1$$

$$\lambda(\lambda - 1) > 0 : \lambda \leq 0 \text{ ou } \lambda > 1$$

Ces deux Conditions ne peut pas être
Vérifiée à la fois donc: le Schéma
est n'est pas stable pour la norme L^∞
dis que $\lambda \neq 1$. (e.e.d e.v n'est pas vérif)
Il est stable seulement pour $\lambda = 1$.

2))

Solution Exercice 2

V1 E2

Sur la plan de normale $n = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \ -1 \ 1]$ qui correspond à la troisième direction principale :

- La composante normale du vecteur contrainte est la troisième contrainte principale : $\sigma_n = \sigma_3$
- La composante tangentielle est nulle $\sigma_t = 0$

Le vecteur contrainte est :

$$T = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & b \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b-4 \end{pmatrix}$$

La contrainte normale :

$$\sigma_n = n \cdot T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (b-5)$$

$$D'où : \sigma_3 = \sigma_n = \frac{1}{2} (b-5)$$

La contrainte tangentielle nulle donne : $\sigma_t^2 = |T|^2 - \sigma_n^2 = 0$

Soit :

$$\frac{1}{2} [1 + (b-4)^2] - \frac{1}{4} (b-5)^2 = 0$$

$$D'où : b = 3 \text{ MPa}$$

$$\text{Par conséquent : } \sigma_3 = -1 \text{ MPa}$$

La contrainte tangentielle maximale est : $\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$

$$\text{Ce qui donne : } \sigma_1 = 2\tau_{\max} + \sigma_3 = 12 - 1 = 11 \text{ MPa}$$

Par ailleurs les expressions des invariants donnent :

$$I_1 = \text{Tr}(\sigma) = a + 3 + b = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_3 = \det(\sigma) = 3ab - 16a - 4b + 20 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

avec

$$\sigma_1 = 11, \quad \sigma_3 = -1 \quad \text{et} \quad b = 3$$

les trois équations se réduisent en :

$$\sigma_2 + 10 = a + 6$$

$$11\sigma_2 = 7a - 8$$

La solution est

$$a = 9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 5 \text{ MPa}$$

2)

Ex(3): Variante (1):

1) Alors, $-u_1'' + \alpha u_1^3 = f$ et $-u_2'' + \alpha u_2^3 = f$

on a: $-u_1'' + u_2'' + \alpha(u_1^3 - u_2^3) = 0$

donc: $-\int_0^1 (u_1 - u_2)'' (u_1 - u_2) dx + \alpha \int_0^1 (u_1^3 - u_2^3) (u_1 - u_2) dx = 0 \dots (1)$

Intégrer par partie le terme $\int_0^1 (u_1 - u_2)'' (u_1 - u_2) dx$:

$$\int_0^1 (u_1 - u_2)'' (u_1 - u_2) dx = \left[\underbrace{u_1 - u_2}_0 \right]_0^1 - \int_0^1 |u_1' - u_2'|^2 dx$$

$$= - \int_0^1 |u_1' - u_2'|^2 dx \dots \dots \dots (2)$$

① et ②, alors le résultat.

Déduire: on utilise que $t \mapsto t^3$ est croissante, est donc

$(u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2)$ toujours positive.

Comme $\alpha > 0$, donc $\begin{cases} \int_0^1 |u_1' - u_2'|^2 dx = 0 \\ \text{et} \int_0^1 (u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2) dx = 0 \end{cases}$

alors $u_1' - u_2' = 0$, avec $u_1(0) = u_2(0)$, on a

$$\boxed{u_1 = u_2}$$

2) Soit $v \in H_0^1(I)$; on utilise (1), on a:

$$-\int_0^1 u'' v + \alpha \int_0^1 u^3 v = \int_0^1 f v dx$$

Intégrer par partie le terme $\int_0^1 u'' v dx$:

on a ; $\int_0^1 u' v' dx = [u' v]_0^1 - \int_0^1 u'' v dx = - \int_0^1 u' v' dx$ / $v(1)=v(0)=0$
 alors ; (2).

3

a) $E(v) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx - \int_0^1 f v dx \geq \frac{1}{2} \|v'\|_{L^2(I)}^2 - \left| \int_0^1 f v dx \right|$
 $\geq \frac{1}{2} \|v'\|^2 - \left(\frac{1}{2} \|v'\|_{L^2(I)}^2 + \frac{C_p^2}{2} \|f\|_{L^2(I)}^2 \right) = - \frac{C_p^2}{2} \|f\|_{L^2(I)}^2$

\mathbb{R}_p

b) soit $v \in H_0^1(I)$; $\forall t \in \mathbb{R} \quad E(u+tv) \geq E(u)$.

on pose $\varphi(t) = E(u+tv)$, donc $\varphi'(0)=0$

$$\begin{cases} \varphi(t) = E(u+tv) \\ = E(u) + t \underbrace{\left(\int_0^1 -v' v' dx \right)}_{(P)} + t^2 (\dots) + t^3 (\dots) + t^4 (\dots) \end{cases}$$

$\varphi'_v(0)=0$ alors la pb (P).

$\varphi(t) = (P) + 2t(\dots)$

$\varphi'(0)=0$; donc (P).

Faculté : Sciences Exactes
Département : Des Mathématiques



كلية العلوم الدقيقة
الرياضيات

كلية:
قسم:

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2021/2020
Concours d'accès au doctorat 3^e cycle, LMD 2020/2021

Spécialité :	Mathématiques appliquées	الاختصاص:
Variante :	2	الخيار رقم:
Epreuve :	Mathématiques appliquées / الرياضيات التطبيقية	اختبار:
Durée :	ساعتان	المعامل:
Date :	6/3/2021	التوقيت:
	المدة:	Coefficient :
	التاريخ:	Heure :
		03
		15:00

Exercice1 : (08pts)

On s'intéresse de la discrétisation du problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

On note $u(x, t)$ la solution de (P) de classe C^∞ .

Pour :

$$x_i = ih, \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad i=0, 1, \dots, N+1, \quad t^n = nk, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On pose $T > 0$ et $kn \leq T$.

On considère le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - u_i^n = 0 & i = 1; 2; \dots; N, \quad n \in \mathbb{N} \\ u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0, & n \in \mathbb{N} \\ u_i^0 = u_0(x_i) & i = 1; 2; \dots; N, \end{cases}$$

1. Montrer que le schéma demande, à chaque pas de temps, la résolution du système linéaire :

$$(1) \quad AU^{n+1} = b,$$

où $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, $b \in \mathbb{R}^N$ à déterminer.

2. Prouver que le système (1) admet une solution unique.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\|U^n\|_\infty = \sup_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} |u_i^n|$

3.1. Montrer que :

$$(1+k)^n \leq (1+k)^{T/k}$$

3.2. Sous quelle condition sur k et h le schéma est stable, en déduire que :

$$\|U^n\|_\infty \leq e^T \|U^0\|_\infty.$$

Exercice 2: (07pts)

L'état des contraintes en un point d'un solide est donné par

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer les contraintes principales $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$ du tenseur σ .

2. Déterminer le vecteur normal n au plan P qui coupe les axes de repère aux points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 2)$.

3. Calculer les composantes normale σ_n et tangentielle σ_t du vecteur contrainte agissant sur le plan P .
4. Déterminer les directions principales du tenseur σ .

Exercice 3: (05pts)

On pose ω un ouvert quelconque de l'espace \mathbb{R}^N et soit $f \in L^2(\omega)$. On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta u + u = f, & \text{dans } \omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (1)$$

1. Trouver la formulation variationnelle du problème (1) à la forme :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\omega), \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\omega). \end{cases} \quad (2)$$

- 2.1. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (2).
- 2.2. Dédurre une autre formulation variationnelle du problème (1) à la forme optimiser

$$\begin{cases} u \in V, \\ J(u) = \min_{v \in V} J(v). \end{cases}$$

Ex 1 V_2 E_1

On s'intéresse de la discrétisation du problème

suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & ; x \in [0, 1] \end{cases}$$

On note $u(x, t)$ la solution de (P) de classe C^∞ .

Pour : $x_i = xh$, $h = \frac{1}{N+1}$; $x = 0, 1, \dots, N+1$
 $t^n = nk$ $n \in \mathbb{N}$.

on pose $T > 0$ et $kn \leq T$

on considère le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_x^{n+1} - u_x^n}{k} - \frac{u_{x+1}^{n+1} - 2u_x^{n+1} + u_{x-1}^{n+1}}{h^2} - u_x^n = 0 & x=1, \dots, N \\ u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0, & n \in \mathbb{N} \\ u_x^0 = u_0(x_i) & x = 0, \dots, N+1 \end{cases}$$

1°/ Montrer que le schéma demande, à chaque pas de temps, la résolution du système

$$\text{linéaire } AU^{n+1} = b, \quad (1)$$

$A \in \mathbb{R}^{N,N}$, $b \in \mathbb{R}^N$ à déterminer.

2/ Prouver que le système linéaire (1) admet une solution unique.

3/ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\|u^n\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |u_i^n|$.

- Montrer que $(1+k)^n \leq (1+k)^{T/k}$

- Sous quelle condition sur k et h le schéma est stable, en déduire que

$$\|u^n\|_\infty \leq e^T \|u^0\|_\infty.$$

Solution Ex 3:

1°/ on a :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k}{h^2} u_{i+1}^{n+1} - \frac{2k}{h^2} u_i^{n+1} + \frac{k}{h^2} u_{i-1}^{n+1} + k u_i^n$$

on pose $\lambda = \frac{k}{h^2}$.

$$u_i^{n+1} = (1 - 2\lambda + k) u_i^n + \lambda u_{i+1}^{n+1} + \lambda u_{i-1}^{n+1}$$

$$(1 + 2\lambda) u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} - \lambda u_{i-1}^{n+1} = (1 + k) u_i^n$$

Donc on obtient :

$$A u^{n+1} = u^n$$

tel que :

$$A = \frac{1}{1+k} \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \\ & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}$$

$$b = u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

1/ Pour que le système linéaire admette une solution unique, il faut et il suffit que la matrice A soit symétrique et définie positive.
 on a: $A^t = A$ A est symétrique

$$A = \frac{\lambda}{1+k} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{\lambda} & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ & -1 & 2 + \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

or: A tridiagonale $(-1, 2 + \frac{1}{\lambda}, -1)$

Il est de la forme $(-1, 2 + c_i, -1)$ $c_i = \frac{1}{\lambda}$

donc définie positive pour $k > 0$ pour que $c_i > 0$.

3/ d'abord on a: $(nk \leq T) \Rightarrow n \leq T/k$

Donc: $(1+k)^n \leq (1+k)^{T/k}$

le schéma s'écrit:

$$(1+k)u_i^n = u_i^{n+1} + \lambda (2u_i^{n+1} - u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})$$

on pose $M = \max u_i^{n+1}$ si (u_i^n) sol du schéma

$$\text{alors: } \max_{i=1, \dots, N} u_i^{n+1} \leq \max_{i=1, \dots, N} u_i^n \leq \dots \leq \max_{i=1, \dots, N} u_i^0$$

(2)

on obtient :

$$\max U_n^{n+1} \leq (1+k) \max U_n^n. (k > 0)$$

par récurrence :

$$\max U_n^n \leq (1+k)^n \max U_n^0.$$

(par analogue pour $\min U_n^{n+1}$), on obtient :

$$\begin{aligned} \|U^n\|_\infty &\leq (1+k)^n \|U_0\|_\infty \\ &\leq (1+k)^{T/k} \|U_0\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or : } (1+k)^{T/k} &= \exp\left(\frac{T}{k} \ln(1+k)\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{T}{k} \cdot k\right) = e^T \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \|U^n\|_\infty \leq e^T \|U_0\|_\infty$$

il suffit que $h > 0$ et $k > 0$ pour que le schéma soit stable en norme L^∞ .

$\therefore \text{Vom (02):}$

$$1) \det(\sigma - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda + 2) = 0$$

La solution donne: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_{2,3} = -2$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 7 \text{ mPa} \\ \lambda_2 = -2 \text{ mPa} \\ \lambda_3 = -2 \text{ mPa} \end{array}$$

$$2) \quad u = B - A = [-1 \quad 1 \quad 0]$$

$$v = C - A = [-1 \quad 0 \quad 2]$$

$$n = \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|}$$

$$u \wedge v = [2, 2, 1] \quad ; \quad |u \wedge v| = \sqrt{9} = 3$$

$$n = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right]$$

$$3) \quad \bullet \text{ Vecteur Contrainte : } T = \sigma \cdot n = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = T \cdot n = \frac{19}{3} = 6,33 \text{ mPa}$$

$$\sigma_t = \sqrt{|T|^2 - \sigma_n^2} = 2,36 \text{ mPa}$$

$$4) \quad \bullet \text{ Première direction : } \sigma_1 = 7 \text{ mPa}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{12} + X_{13} = 2X_{11}$$

$$X_{12} - X_{13} = X_{11}$$

Pour $X_{12} = X_{11}$ et $X_{13} = X_{11}$

$$X_{11}^2 + X_{12}^2 + X_{13}^2 = 1 \quad ; \text{ donc : } X_{11} = \pm 1/\sqrt{3}$$

$$X_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ 1]$$

• Seconde direction: $\sigma_2 = -2 \text{ mPa}$:

même méthode

$$X_2 = \pm \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

• La troisième direction: $X_3 = X_1 \wedge X_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{6}} [1, -2, 1]$

3) : Variante 2:

1- Soit $v \in H_0^1(\omega)$; par l'intégrale par partie; on obtient;

$$\int_{\omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v) \, du = \int_{\omega} f v \, du ; \text{ on a}$$

$$a(u, v) = \int_{\omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v) \, du \quad ; \quad L(v) = \int_{\omega} f v \, du.$$

2-a) $a(\cdot, \cdot)$, $L(\cdot)$ sont continue (evident).

$$a(u, u) = \|u\|_{H^1(\omega)}^2 ; \text{ On a } a \text{ coercive.}$$

On applique théorème de Lax-Milgram, on existe une solution unique de (2).

c) $a(u, v) = a(v, u)$; $\forall u, v \in H_0^1(\omega)$;

alors le problème (2) équivaut la minimisation de l'énergie

$$F(v) = \min_{v \in V} J(v) \text{ tq}$$

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\omega} |\nabla v|^2 \, du - \int_{\omega} f v \, du ; \quad \forall v \in H_0^1(\omega).$$

$$\text{et } V = H_0^1(\omega)$$

Faculté : Sciences Exactes
Département : Des Mathématiques



كلية العلوم الدقيقة
الرياضيات

كلية:
قسم:

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2021/2020
Concours d'accès au doctorat 3^e cycle, LMD 2020/2021

Spécialité :	Mathématiques appliquées	الاختصاص:
Variante :	3	الخيار رقم:
Epreuve :	Mathématiques appliquées / الرياضيات التطبيقية	اختبار:
Durée :	ساعتان	المدة:
Date :	6/3/2021	التاريخ:
	Coefficient :	03
	Heure :	15:00
		المعامل:
		التوقيت:

Exercice1 :(08pts)

On s'intéresse de la discrétisation du problème suivant :

$$(p) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, 1] \end{cases}$$

On note $u(x, t)$ la solution de (P) de classe C^∞ .

Pour :

$$x_i = ih, \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad i=0, 1, \dots, N+1, \quad t^n = nk, \quad n \in \mathbb{N}$$

On pose $T > 0$ et $kn \leq T$.

On considère le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - u_i^{n+1} = 0 & i = 1; 2; \dots; N, \quad n \in \mathbb{N} \\ u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0, & n \in \mathbb{N} \\ u_i^0 = u_0(x_i) & i = 1; 2; \dots; N, \end{cases}$$

1. Montrer que le schéma demande, à chaque pas de temps, la résolution du système linéaire :

$$(1) \quad AU^{n+1} = b,$$

où $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, $b \in \mathbb{R}^N$ à déterminer.

2. Prouver que le système (1) admet une solution unique.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\|U^n\|_\infty = \sup_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} |u_i^n|$

3.1. Montrer que :

$$\frac{1}{1-k} \leq 1 + \beta k,$$

pour $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$, $k \in]0, \alpha[$, $\alpha \in]0, 1[$.

3.2. Sous quelle condition sur k et h le schéma est stable, en déduire que :

$$\|U^n\|_\infty \leq e^{\beta T} \|U^0\|_\infty.$$

Exercice2 :(07pts)

La réparation des contraintes dans un corps solide déformable en équilibre statique sans effet des forces de volume est donnée par le tenseur suivant rapporté au repère (O, e_1, e_2, e_3) :

$$\sigma = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & x_1 - 2x_2 & 3 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{l'état des contraintes est indépendant de l'axe } ox_3)$$

La contrainte agissant au point $M(0,1)$ sur un plan verticale de normale inclinée de 45° par rapport à l'axe Ox_1 , est une contrainte de cisaillement pur τ . Déterminer $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ et donner la valeur de τ .

Exercice3 :(05pts)

On pose ω un ouvert borné régulier de classe C^1 et soit $f \in L^2(\omega)$ et g est une trace sur $\partial\omega$ d'une fonction de $H^1(\omega)$. On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que} \\ -\Delta u = f, \text{ dans } \omega, \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} = g, \text{ sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que toute solution du problème (1) est une solution d'un problème à la forme :

$$\begin{cases} u \in V, \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (2)$$

où V est un espace de Hilbert, et a, L sont des formes bilinéaire et linéaire, respectivement.

2.1. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (2).

2.2. Dédurre une autre formulation variationnelle du problème (1) à la forme optimiser

$$\begin{cases} u \in V, \\ J(u) = \min_{v \in V} J(v). \end{cases}$$

~~Ex 1~~ V3

Solution

no/ona:

$$u_n^{n+1} = \frac{k}{h^2} (u_{n+1}^{n+1} - 2u_n^{n+1} + u_{n-1}^{n+1}) + k u_n^{n+1} + u_n^n$$

on pose $\lambda = \frac{k}{h^2}$

$$(1 + 2\lambda - k)u_n^{n+1} - \lambda u_{n+1}^{n+1} - \lambda u_{n-1}^{n+1} = u_n^n$$

$$A u^{n+1} = b$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda-k & -\lambda & & 0 \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ 0 & & -\lambda & 1+2\lambda-k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N', N'}$$

$$b = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$$

$$A = \lambda$$

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{1-k}{\lambda} & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & & -1 \\ & -1 & & 2 + \frac{(1-k)}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$A = \text{trig}(-1, 2 + C_i, -1)$$

$$C_i = \frac{1-k}{\lambda} \quad \lambda > 0$$

A est une matrice tridiagonal symétrique
définie positive si $C_i \geq 0$

d'où : pour $k \in]0, 1[$,

le système (1) admet une solution unique

3)

3.1/ pour $k \in]0, \alpha[$ et $\alpha \in]0, 1[$

$$\text{c. d. d. } (k \leq \alpha) \Rightarrow 1 - \alpha \leq 1 - k \\ \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-k}$$

$$\text{donc : } 1 - \frac{1}{1-k} \leq 1 - \frac{1}{1-\alpha}$$

(2)

d'une autre côté on a:

$$\beta = \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta-1}{\beta}, \text{ on trouve}$$

$$\frac{1}{1-k} \leq 1 + \beta k \quad (*)$$

$$\left(\frac{1}{1-k} = \frac{1-k+k}{1-k} = 1 + \frac{k}{1-k} \leq 1 + k \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \right. \\ \left. \leq 1 + \beta k. \right.$$

3.2/ pour que le schéma soit stable
en norme L^∞ . ($k \in]0, 1[$).

$$(1 + 2\lambda - k - \lambda - \lambda) U_n^{n+1} = U_n^n$$

$$\text{donc: } (1 - k) U_n^{n+1} = U_n^n$$

$$\text{c.à.d. } U_n^{n+1} = \frac{1}{1-k} U_n^n$$

$$\text{on a } \|U^n\|_\infty = \sup_i |U_i^n|; U_i^n \text{ scalaire (1)}$$

$$U_n^{n+1} \leq \frac{1}{1-k} U_n^n \quad \text{par récurrence}$$

$$\text{On obtient: } \|U^n\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1-k} \right)^n \|U_n^0\|_\infty$$

$$\text{d'après } (*) \quad \|U^n\|_\infty \leq (1 + \beta k)^n \|U_n^0\|_\infty$$

$$(nk \leq T) \Rightarrow n \leq \frac{T}{k}.$$

alors :

$$(1 + \beta k)^n \leq (1 + \beta k)^{T/k}.$$

donc :

$$\begin{aligned} \|u^n\|_{\infty} &\leq ((1 + \beta k)^{T/k}) \|u^0\|_{\infty} \\ &\leq \exp(\ln(1 + \beta k)^{T/k}) \\ &\leq \exp \frac{T}{k} \ln \beta k \|u^0\|_{\infty} \\ &\leq \exp(\beta T) \|u^0\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Van 3: Ex(02)

Solution

Les équations d'équilibre statique :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = -1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} = 2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = 0 \quad 0 = 0 \quad (3)$$

L'équation (1) donne : $\sigma_{12} = -y + f(x)$

avec l'équation (2) : $f(x) = 2x + c$; c : constante

D'où : $\sigma_{12} = 2x - y + c$

Le tenseur des contraintes au point $M(0,1)$:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1+c & 0 \\ -1+c & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur contrainte au point M selon $n = 1/\sqrt{2} \langle 1 \ 1 \ 0 \rangle$: $T = \sigma \cdot n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} c \\ c-3 \\ 0 \end{bmatrix}$

La composante normale $\sigma_n = n \cdot T = c - 3/2$

La contrainte est une contrainte de cisaillement pure : $\sigma_n = 0$ d'où $c = 3/2$ (MPa)

Finalement : $\sigma_{12} = 2x - y + 3/2$

La composante tangentielle : $\tau = \sqrt{|T|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{(c^2 + (c-3)^2 - (c-3/2)^2)} = \frac{9}{4} \text{ MPa}$

X/03) : Variante (3) :

1/- Soit u est une solution du problème (1), v fonction test :

Par intégration par parties, on obtient,

$$\int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\omega} f v \, dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g - u \text{ sur } \partial\omega, \text{ on a}$$

$$\int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\omega} (g - u) v \, ds = \int_{\omega} f v \, dx ;$$

$$\text{on a } \begin{cases} a(u, v) = \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\omega} (g - u) v \, ds \\ L(v) = \int_{\omega} f v \, dx + \int_{\partial\omega} g v \, ds \\ V = H^1(\omega) \end{cases}$$

2/- a) $a(\cdot, \cdot)$ forme bilinéaire, continue
 $L(\cdot)$: forme linéaire, continue

$a(\cdot, \cdot)$ coercive : $a(u, u) =$

$$\forall v \in H^1(\omega) : \|v\|_{L^2(\omega)} \leq C (\|v\|_{L^2(\partial\omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\omega)})$$

alors la coercivité.

on applique théorème de Lax-Milgram : Alors le résultat

$$\begin{aligned} h). \quad J(u) &= \frac{1}{2} a(u, u) - L(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} |u|^2 - \int_{\omega} f u \, dx - \int_{\partial\omega} g u \, ds \end{aligned}$$

$$V = H^1(\omega).$$