

Faculté :

Science exacts

Département :

Mathématiques



العلوم الدقيقة

الرياضيات

كلية:

قسم:

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2020/2021

Concours d'accès au doctorat 3<sup>e</sup> cycle, LMD 2020/2021

Spécialité :

Mathématiques

الاختصاص:

Variante :

01

الخيار رقم:

Epreuve :

Analyse mathématique générale.

اختبار:

Durée :

ساعة ونصف

المدة: 01:30

Coefficient :

01

المعامل:

Date :

06/03/2021

التاريخ:

Heure :

13:00

التوقيت:

**Exercice 1. (6 points)**

Soit  $I = ]-1, 1[$ . Les fonctions suivantes sont-elles dans  $H^1(I)$  ?

(1)  $f(x) = |x|$ ,  $x \in I$ .

(2)  $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$

**Exercice 2. (6 points)**

Soient  $E, F$  deux espaces de Hilbert réels muni des produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  respectivement,  $T : E \rightarrow F$  et  $S : F \rightarrow E$  deux applications qui satisfait pour tout  $(x, y) \in E \times F$  la relation suivante :

$$\langle T(x), y \rangle_F = \langle x, S(y) \rangle_E.$$

1. Vérifier que  $T$  et  $S$  sont linéaires.

2. Enoncer le théorème du graphe fermé puis montrer que  $T$  et  $S$  sont continus.

**Exercice 3. (8 points)**

Sur l'espace de Sobolev  $H^1(]0, 1[)$  (c'est un espace de Hilbert) muni de la norme usuelle

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_0^1 |u(x)|^2 dx + \int_0^1 |u'(x)|^2 dx, \text{ on définit la forme bilinéaire : } a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx.$$

1) Montrer que  $a$  est définie positive.

2) On pose  $u_n(x) = \cos(n\pi x)$ .

- Calculer  $a(u_n, u_n)$  et  $\|u_n\|_{H^1}^2$  et déduire que  $a$  n'est pas coercive.

3) Soit la forme bilinéaire  $b(u, v) = \int_0^1 u_x(x)v_x(x) dx - \omega^2 \int_0^1 u(x)v(x) dx$

- Calculer  $b(1, 1)$  et  $b(u_1, u_1)$  et déduire que  $b$  n'est coercive ni définie positive.

**Définition :** On dit que  $a$  est coercive si  $\exists \alpha > 0; \forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$ .

EX 11 (Corrigé)  
 $\mathcal{H} = ]-1, 1[$

(Exercices sur les espaces de Sobolev)

(A)  $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 1] \\ -x, & \text{si } x \in [-1, 0] \end{cases} \Rightarrow f \in L^2(]-1, 1[)$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ -1, & \text{si } x \in [-1, 0[ \end{cases} = \chi_{[0, 1]} - \chi_{[-1, 0[} = 2H(x) - 1$$

$f'$  n'est pas continue sur  $[-1, 1]$ , mais  $f' \in L^2(]-1, 1[)$  :  $\int_{-1}^1 (f')^2 = 2$

Donc  $f \in H^1(]-1, 1[)$ .

Par contre  $f \notin H^2(]-1, 1[)$ , puisque  $f'' = 2\delta_0$  qui est singulière.

(B)  $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow H \in L^2(]-1, 1[)$ .

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]-1, 1[)$  on a :

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= - \int_{-1}^1 H(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 0 \cdot \varphi'(x) dx + \int_0^1 1 \cdot \varphi'(x) dx \\ &= - \int_0^1 \varphi'(x) dx = - [\varphi(x)]_0^1 = -\varphi(1) + \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Ainsi,  $H' = \delta_0 \in \mathcal{D}'(]-1, 1[)$  mais  $\delta_0 \notin L^2(]-1, 1[)$ .

Donc  $H \notin H^1(]-1, 1[)$ .



## Exo 2 (06 pt) (variante 4)

1) Vérifions que  $T$  est linéaire.

Soient  $x, y \in E$ ,  $z \in F$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a:

$$\begin{aligned}\langle T(\lambda x + \mu y), z \rangle_F &= \langle \lambda x + \mu y, S(z) \rangle_E = \lambda \langle x, S(z) \rangle_E + \mu \langle y, S(z) \rangle_E \\ &= \lambda \langle T(x), z \rangle_F + \mu \langle T(y), z \rangle_F\end{aligned}$$

Donc  $T$  est linéaire.

De même, on vérifie que  $S$  est linéaire.

2) Le Théorème (du graphe fermé)

Soient  $X, Y$  des espaces de Banach et  $T: X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire. Alors  $T$  est continue si et seulement si  $G(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, T(x)) : x \in X\}$  est fermé.

Pour montrer que  $T$  est continue, il suffit donc de montrer que  $G(T)$  est fermé.

Soit  $(x_n) \subset E$  tq:  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $T(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ .

Il faut montrer que  $y = 0$ . En effet.

$$\begin{aligned}\|y\|_F^2 &= \langle y, y \rangle_F = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n), y \rangle_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T(x_n), y \rangle_F \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, S(y) \rangle_F = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, S(y) \rangle_F = \langle 0, S(y) \rangle_F = 0\end{aligned}$$

par suite  $y = 0$ .

De même, on montre que  $S$  est continue.

## Variante 1

### Exercice 3

$$a(u, v) = \int_0^1 u(x) v(x) dx$$

1) Soit  $u$  une fonction qui est non nulle dans une partie de mesure non nulle de  $]0, 1[$  alors

$$a(u, u) = \int_0^1 u^2(x) dx > 0.$$

$$\begin{aligned} 2) a(u_n, u_n) &= \int_0^1 \cos^2(n\pi x) dx = \int_0^1 \frac{1 + \cos(2n\pi x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \int_0^1 \cos^2(n\pi x) dx + \int_0^1 2\pi^2 n^2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2} (1 + n^2 \pi^2) \end{aligned}$$

$$\forall \alpha > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } a(u_n, u_n) < \alpha \|u_n\|^2$$

$$\begin{aligned} 3) \quad b(1, 1) &= 1, \quad b(u_n, u_1) = \int_0^1 \sin(n\pi x)^2 - \omega \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \\ b(1, 1) &= -\omega^2 = \frac{1}{2} (n^2 \pi^2 - \omega^2) \end{aligned}$$

Faculté : Science exacts  
Département : Mathématiques



العلوم الدقيقة  
الرياضيات

كلية:  
قسم:

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2020/2021  
Concours d'accès au doctorat 3<sup>e</sup> cycle, LMD 2020/2021

Spécialité : Commun pour les trois spécialités de Mathématiques الاختصاص:

Variante :		02	الخيار رقم:		
Epreuve :	Analyse mathématique générale.				اختبار:
Durée :	ساعة ونصف	المدة: 01:30	Coefficient :	01	المعامل:
Date :	06/03/2021	التاريخ:	Heure :	13:00	التوقيت:

**Exercice 1. (6 points)**

Soit  $u \in H^1(]0,1[ \times ]0,1[)$ . On définit pour tout  $x \in ]0,1[$  la fonction

$$v(x) := \int_0^1 u(x, t) dt.$$

- 1) Montrer que  $v \in L^2(]0,1[)$ .
- 2) Calculer la dérivée  $\frac{dv}{dx}$  et déduire que  $v \in H^1(]0,1[)$ .

**Exercice 2. (6 points)**

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel et soient  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $H$  et  $\| \cdot \|$  la norme associée.

- 1) Montrer que si  $\forall y \in H, \langle x, y \rangle = 0$  alors,  $x = 0$ .
- 2) Soit  $u : H \rightarrow H$  une application telle que  $\langle u(x), z \rangle = \langle x, u(z) \rangle, \forall x, y \in H$ .  
Montrer que  $u$  est linéaire.
- 3) Supposons que  $\|x\| = \|y\|$ . Montrer que pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a  $\|ax + by\| = \|bx + ay\|$ .

**Exercice 3. (8 points)**

Soient  $E_1, E_2, E_3$  trois espaces de Banach de normes  $\| \cdot \|_k, k=1,2,3$  tels que  $E_1 \subset E_2 \subset E_3$ , l'injection canonique  $i : E_1 \rightarrow E_2$  étant compacte et l'injection canonique  $j : E_2 \rightarrow E_3$  est continue.

1. Justifier que pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de la sphère unité de  $E_1$  il existe une sous suite  $(x_{n_k})_{n_k \geq 1}$  qui converge vers une limite  $x \in E_2$ .
2. Montrer que si  $(n_k x_{n_k})_{n_k \geq 1}$  est bornée dans  $E_3$  alors  $x = 0$ .
3. Avec un raisonnement par l'absurde, déduire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_\varepsilon > 0$  tel que  $\|x\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1 + C_\varepsilon \|x\|_3$ , pour tout  $x \in E_1$ .



(Corriger)  
 $u \in H^1([0,1] \times [0,1])$   
 $\forall x \in [0,1], v(x) = \int_0^1 u(x,t) dt$   
 (i)  $v \in L^2([0,1])$ ?

D'abord,  $v$  est bien défini, par ex.  $u \in L^2([0,1]^2) \subset L^1([0,1]^2)$   
 (et d'après Fubini, elle est intégrable partiellement)

$$\int_0^1 |v(x)|^2 dx = \int_0^1 \left( \int_0^1 u(x,t) dt \right)^2 dx \stackrel{\text{C.Sch.}}{\leq} \int_0^1 \left( \int_0^1 1^2 dt \cdot \int_0^1 u^2(x,t) dt \right) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |v(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |u(x,t)|^2 dt \right) dx = \|u\|_{L^2}^2 < \infty$$

$$\Rightarrow v \in L^2([0,1])$$

(ii) Calcul de  $v'$ .

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}([0,1]): \langle v', \varphi \rangle = -\langle v, \varphi' \rangle = - \int_0^1 v(x) \varphi'(x) dx$$

$$= - \int_0^1 \left( \int_0^1 u(x,t) dt \right) \varphi'(x) dx$$

Fubini  
 $\Rightarrow \langle v', \varphi \rangle = - \int_0^1 \left( \int_0^1 u(x,t) \varphi'(x) dx \right) dt$

$$\text{or, } \int_0^1 u(x,t) \varphi'(x) dx = \left[ u(x,t) \varphi(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \varphi(x) dx$$

$$= - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \varphi(x) dx \quad (= \langle u'_x, \varphi \rangle)$$

$$\Rightarrow \langle v', \varphi \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \varphi(x) dx dt = \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \varphi(x) dx \right) dt$$

$$= \left\langle \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) dt, \varphi \right\rangle$$

$$\Rightarrow v' = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) dt$$

$$\int_0^1 |v'(x)|^2 dx = \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) dt \right)^2 dx \stackrel{\text{C.Sch.}}{\leq} \int_0^1 \left( \int_0^1 1^2 dt \cdot \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right|^2 dt \right) dx$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right|^2 dt dx = \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2([0,1])}^2 dt$$

$$\leq \|u\|_{H^1([0,1] \times [0,1])}^2 < \infty$$

$$\Rightarrow v \in H^1([0,1])$$

## Exercice 2

### Variante 2

1)  $\forall x \in H, \langle x, y \rangle = 0$ , pour  $y = x$  on a  $\|x\|^2 = 0$   
donc  $x = 0$

$$\begin{aligned} 2) \langle u(\alpha x + \beta y), z \rangle &= \langle \alpha x + \beta y, u(z) \rangle \\ &= \alpha \langle x, u(z) \rangle + \beta \langle y, u(z) \rangle \\ &= \alpha \langle u(x), z \rangle + \beta \langle u(y), z \rangle \\ &= \langle \alpha u(x) + \beta u(y), z \rangle \quad \forall z \in H \end{aligned}$$

donc  $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$

$$\begin{aligned} 3) \|ax + by\|^2 &= \langle ax + by, ax + by \rangle \\ &= a^2 \|x\|^2 + 2ab \langle x, y \rangle + b^2 \|y\|^2 \\ &= a^2 \|y\|^2 + 2ab \langle x, y \rangle + b^2 \|x\|^2 \\ &= \|ay + bx\|^2 \end{aligned}$$

donc  $\|ax + by\| = \|ay + bx\|$

→ (08 pts) (variante 2)

1)  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  est une suite de la sphère unité de  $E_1$  s.à.d :

$$\forall n \geq 1 : \|x_n\|_1 \leq 1$$

ainsi  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  est une suite bornée dans  $E_1$ , et puisque l'injection  $i: E_1 \rightarrow E_2$  est compacte, alors la suite :

$\{i(x_n)\}_{n \geq 1} = \{x_n\}_{n \geq 1}$  admet une sous-suite convergente

dans  $E_2$  :  $\exists \{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1} : x_{n_k} \rightarrow x$  dans  $E_2$  (0, 2)

2) On suppose que  $\{n_k x_{n_k}\}_{k \geq 1}$  est bornée dans  $E_3$  :

$$\exists M > 0, \forall n_k \geq 1 : \|n_k x_{n_k}\|_3 = n_k \|x_{n_k}\|_3 \leq M$$

$$\Rightarrow \forall n_k \geq 1 : \|x_{n_k}\|_3 \leq \frac{M}{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} 0$$

par suite  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$  converge vers 0 dans  $E_3$  (0, 2)

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$  converge vers  $x$  dans  $E_3$ . En effet :

Puisque  $j: E_2 \rightarrow E_3$  est continue :

$$\exists A > 0, \forall y \in E_2 : \|y\|_3 \leq A \|y\|_2$$

Maintenant, puisque, -l'après 1/,  $x_{n_k} \rightarrow x$  dans  $E_2$ , alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_{k_0} \geq 1, \forall n_k \geq n_{k_0} : \|x_{n_k} - x\|_2 < \frac{\varepsilon}{A}$$

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_{k_0} \geq 1, \forall n_k \geq n_{k_0} : \|x_{n_k} - x\|_3 \leq A \|x_{n_k} - x\|_2 < \varepsilon$$

s.à.d :  $x_{n_k} \rightarrow x$  dans  $E_3$ .



3) Soit  $S$  la sphère unité de  $E_1$ . Un raisonnement par l'absurde, conduit à:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists x_n \in S : \|x_n\|_2 > \varepsilon \|x_n\|_1 + n \|x_n\|_3 = \varepsilon + n \|x_n\|_3 \quad (*)$$

D'après 1),  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  admet une sous-suite  $\{x_{n_k}\}_{n_k \geq 1}$

qui converge vers  $x$  dans  $E_2$ .

La relation (\*) montre que  $\{n_k x_{n_k}\}_{n_k \geq 1}$  est borné dans  $E_3$  (puisque  $\{x_{n_k}\}$  est convergente dans  $E_2$  et par suite borné).

Donc, d'après 2)  $x = 0$ .

Mais (\*) implique aussi que  $\|x_{n_k}\|_2 > \varepsilon$ , ce qui contredit le fait que  $x_{n_k} \rightarrow 0$  dans  $E_2$ .

Faculté :  
Département :

Science exacts  
Mathématiques



العلوم الدقيقة  
الرياضيات

كلية:  
قسم:

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2020/2021

Concours d'accès au doctorat 3<sup>e</sup> cycle, LMD 2020/2021

Spécialité :

Commun pour les trois spécialités de Mathématiques

الاختصاص:

Variante :

03

الخيار رقم:

Epreuve :

Analyse mathématique générale.

اختبار:

Durée :

ساعة ونصف

المدة: 01:30

Coefficient :

01

المعامل:

Date :

06/03/2021

التاريخ:

Heure :

13:00

التوقيت:

### Exercice 1. (6 points)

1) Soit  $f, g \in L^3(\mathbb{R})$ . Montrer que  $f^2 g \in L^1(\mathbb{R})$ .

2) Soit  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) := \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Montrer que  $f \in H^1(]0, 1[)$ .

### Exercice 2. (6 points)

Soit  $\Omega := ]a, b[$  ( $a < b$  dans  $\mathbb{R}$ ). On définit l'ensemble  $V$  par  $V := \{v \in H^1(\Omega); v(a) = 0\}$ .

- 1) Expliquer pourquoi l'ensemble  $V$  est bien défini.
- 2) Montrer que  $V$  est fermé dans  $H^1(\Omega)$ .
- 3) En déduire que  $V$  est un espace de Hilbert pour la norme induite par celle de  $H^1(\Omega)$ .

### Exercice 3. (8 points)

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel de dimension finie (par exemple  $H = \mathbb{R}^N$ ), et soient  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $H$  et  $\|\cdot\|$  la norme associée.

Soient  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire continue,  $S = \{u \in H; \|u\| = 1\}$  la sphère unité de  $H$  et  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(u) = a(u, u)$ .

- 1) Montrer que  $S$  est compacte, (peut être généraliser du cas  $H = \mathbb{R}$ ).
- 2) On suppose que  $a$  est définie positive.
  - Montrer qu'il existe  $\bar{u} \in H: f(\bar{u}) \leq f(u), \forall u \in H$ .
  - Montrer que  $\alpha = f(\bar{u}) > 0$ , en déduire que  $a$  est coercive.
- 3) On suppose que  $a$  est coercive. Soit  $0 \neq v \in H$ , on pose  $u = \frac{v}{\|v\|}$ , montrer que  $f(u) \geq \alpha$ . En déduire que  $a$  est définie positive.

Définition : On dit que  $a$  est coercive si  $\exists \alpha > 0; \forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$ .

# Variante 3

## Exercice 1

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|^2 dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} (1-x)^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} < \infty \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 < \infty$$

donc  $f, f' \in L^2(0,1)$  ce qui implique que  $f \in H^1(I, \mathbb{R})$

partie 1: On applique l'inégalité de Hölder  
avec  $p=3$  et  $q=\frac{3}{2}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f^2(x)| |g(x)| dx &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2 \times \frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq \|f\|_{L^3}^2 \times \|g\|^2. \end{aligned}$$



## 2. V3 (Corrigé)

- (1) L'ensemble ~~ouvert~~  $\Omega = ]a, b[$  étant un ouvert dans  $\mathbb{R}$ , alors les éléments de  $H^1(\Omega)$  sont des fonctions continues et bornées dans  $]a, b[$ . Ainsi, la valeur en  $x=a$  (et  $x=b$ ) pour tout élément de  $H^1(\Omega)$  est possédée un sens (est bien définie).
- (i) La forme linéaire  $H^1(\Omega) \ni v \xrightarrow{F} v(a) \in \mathbb{R}$  étant continue, son noyau  $\text{Ker } F$  est un sous-espace fermé dans  $H^1(\Omega)$ .  
En effet, l'injection  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$  est continue donc  $\exists c > 0$  t. q  
$$\forall v \in H^1(\Omega) : |F(v)| = |v(a)| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}$$
Par conséquent  $V = \text{Ker } F$  est un sous-espace fermé dans  $H^1(\Omega)$ .
- (ii) L'espace  $H^1(\Omega)$  est un Hilbert, donc  $V$  étant fermé dans  $H^1(\Omega)$ ,  $V$  est complet.  
D'où  $V$  est un espace de Hilbert pour la norme induite par celle de  $H^1(\Omega)$ .

Exercice 3

1)  $S$  est fermée bornée dans  $\mathbb{R}^n$  donc compacte.

2)  $f$  continue sur  $S$  donc atteint sa borne inférieure

$\exists \bar{u} \in S$  tq  $f(\bar{u}) \leq f(u) \quad \forall u \in S$ .

$\bar{u} \in S$  donc  $\bar{u} \neq 0$ , et par suite  $\alpha = f(\bar{u}) = a(\bar{u}, \bar{u}) > 0$

$\forall u \in H$ , on pose  $u = \frac{v}{\|u\|}$  donc  $f(u) \geq \alpha$

$$a\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) \geq \alpha \Rightarrow \frac{1}{\|v\|^2} a(v, v) \geq \alpha$$

et par suite  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ ,

donc  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive.

3)  $u = \frac{v}{\|u\|}$ ,  $u \in S$  donc  $f(u) \geq \alpha$

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 > 0 \quad \text{si } v \neq 0.$$